Ueber den Tangentencomplex der Fläche 2. Grades.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät

der

Königlichen Universität zu Breslau

eingereicht

und mit Genehmigung derselben veröffentlicht

von

Paul Gerlich.

Freitag, den 26. Mai 1905, Vormittags $9^1/_2$ Uhr

in der Aula Leopoldina

VORTRAG:

Ursprung und Entwicklung der Stern-Polygone

und

PROMOTION.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1905.

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät
der Universität Breslau.

Referent: Prof. Dr. R. Sturm.

Herrn Geheimrat

Rudolf Sturm

in Verehrung und Dankbarkeit

gewidmet vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548202_0114

Im dritten Bande der Liniengeometrie des Herrn Prof. Dr. Sturm, Nr. 838, finden sich ohne Beweis einige Sätze über die Regelschaaren mitgeteilt, die sich im Tangentencomplex der Fläche 2. Grades befinden. Der Beweis dieser Sätze und die Beantwortung einer mir nachträglich von Herrn Geheimrat Sturm vorgelegten Frage über die Charakteristiken des Systems der Complexcurven des Tangentencomplexes der Fläche 2. Grades machen den Hauptbestandteil dieser Arbeit aus. Dazu treten noch einige andere Fragen, die ich mir selbst vorgelegt und beantwortet habe und sich im wesentlichen auf Verhältnisse beziehen, die beim allgemeinen Complex 2. Grades bekannt sind und bei diesem speziellen Complex 2. Grades untersucht werden.

Der Grad, die singuläre Fläche, die singulären Strahlen, die stationären Punkte und Ebenen, die stationären Doppelstrahlen des Tangentencomplexes; die Complexfläche einer Geraden in Bezug auf ihn.

1. Entsprechend den ∞^2 Punkten und Tangentialebenen einer Fläche hat die gegebene Fläche 2. Grades F^2 ∞^2 Tangentenbüschel mit je ∞^1 Strahlen. Also bilden die sämtlichen Tangenten der F^2 einen Complex. Wir sind demnach befugt, von einem Tangentencomplex der Fläche 2. Grades zu sprechen.

Von jedem Punkte X des Raumes kommt an die F^2 ein Kegel 2. Klasse, erzeugt durch die Berührungsebenen aus X an die F^2. Dieser Kegel ist aber zugleich zweiter Ordnung und, als solcher aufgefasst, sind die Tangenten aus X an die

F^2 seine Erzeugenden. Es ist mithin der Complexkegel eines Punktes X sein Tangentenkegel an die F^2.

Jede Ebene ξ des Raumes schneidet aus der F^2 eine Curve 2. Ordnung aus. Diese Curve ist zugleich zweiter Klasse und, als solche angesehen, sind ihre Erzeugenden die Tangenten der F^2 in der Ebene ξ. Somit ist die Complexcurve einer Ebene ξ ihr Schnittkegelschnitt mit der F^2.

Die Complexkegel (X) und Complexcurven (ξ) des Tangentencomplexes einer Fläche 2. Grades sind die Tangentenkegel bezw. ebenen Schnitte der Fläche.

Die Complexkegel und Complexcurven sind daher zweiter Ordnung bezw. zweiter Klasse. Folglich ist der fragliche Complex zweiten Grades.

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades ist ein Complex 2. Grades.

2. Die gegebene F^2 trägt zwei verbundene Regelschaaren, die ich bezw. mit Γ und Λ bezeichne. Es sei g eine beliebige Gerade der Regelschaar Γ. Ich lege durch sie einen Strahlenbüschel (X, ξ), d. i. einen Strahlenbüschel, dessen Scheitel X und Ebene ξ mit der Geraden g incidirt. Die Ebene ξ des Strahlenbüschels ist eine Berührungsebene der F^2, und zwar ist ihr Berührungspunkt derjenige Punkt gl auf g, in welchem die einzige in die Ebene ξ fallende Gerade l der Regelschaar Λ die Gerade g schneidet.

Die beiden Complexstrahlen nun, die sich in jedem beliebigen Strahlenbüschel (X, ξ) befinden müssen, sind ersichtlich die beiden Tangenten aus dem Scheitel X an den von der Ebene ξ aus der F^2 ausgeschnittenen Kegelschnitt. Da dieser Kegelschnitt aber in diesem Falle das Geradenpaar gl ist, so fallen die beiden Tangenten des Punktes X in den Strahl des Büschels (X, ξ) zusammen, der nach dem Doppelpunkt gl des Geradenpaars hingeht, also, da X auf g liegt, in den Strahl g.

In jedem durch die Gerade g gehenden Strahlenbüschel vereinigen sich also die beiden Complexstrahlen in der Geraden g. Die Gerade g ist mithin ein Doppelstrahl des Tangentencomplexes.

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass auch jede Gerade l der Regelschaar Λ Doppelstrahl des vorliegenden Complexes sein muss.

Also ist der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades ein Complex 2. Grades mit ∞^1 Doppelstrahlen.

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades besitzt in den beiden verbundenen Regelschaaren Γ *und* Λ *der Grundfläche zwei Regelschaaren mit je* ∞^1 *Doppelstrahlen.*

Jeder Doppelstrahl eines quadratischen Complexes ist aber Doppelgerade seiner singulären Fläche (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 767). Da nun jede Gerade der Regelschaaren Γ und Λ Doppelstrahl des Tangentencomplexes der F^2 ist, so folgt, dass die Trägerfläche beider Regelschaaren, also die gegebene F^2, doppelt gerechnet, die vollständige singuläre Fläche des Tangentencomplexes ist.

Die gegebene Fläche 2. Grades, doppelt gerechnet, ist die vollständige singuläre Fläche ihres Tangentencomplexes.

3. Weil die zu Grunde liegende Fläche F^2 die singuläre Fläche ihres Tangentencomplexes ist, so ist jeder ihrer Punkte und jede ihrer Berührungsebenen singulärer Punkt bezw. singuläre Ebene des Tangentencomplexes.

Nun ist doch der Complexkegel eines Punktes P der Fläche seine doppelt gerechnete Berührungsebene. Mithin ist P nicht bloss singulärer Punkt, also ein Punkt, dessen Complexkegel in zwei Ebenen mit bestimmtem zugehörigen singulären Strahl zerfällt, sondern stationärer Punkt; die Schnittlinie der beiden Complexebenen ist unbestimmt geworden, jede Gerade des Tangentenbüschels um P in der zugehörigen Tangentialebene kann der dem Punkte P zugehörige singuläre Strahl sein.

Der Complexkegelschnitt einer Berührungsebene π der F^2 ist ferner, als Strahlenerzeugnis betrachtet, der doppelte Strahlenbüschel um den Berührungspunkt gl der Ebene π. Also ist die Ebene π nicht bloss singuläre Ebene, d. i. eine Ebene, deren Complexkegelschnitt in zwei Strahlenbüschel mit bestimmtem zugehörigen singulären Strahl zerfällt, sondern eine stationäre Ebene; die Verbindungslinie der Scheitel der

beiden Strahlenbüschel ist unbestimmt geworden, jeder Strahl des Büschels um den Berührungspunkt der Ebene π kann der zugehörige singuläre Strahl sein.

Jeder Punkt und jede Berührungsebene der F^2 ist also für den Tangentencomplex sogar stationär, und jede Tangente der F^2 ist für ihren Berührungspunkt sowohl als für ihre Berührungsebene zugehöriger singulärer Strahl.

Somit haben wir folgendes Ergebnis gewonnen:

Alle Punkte und alle Berührungsebenen der zu Grunde liegenden Fläche F^2 sind für den Tangentencomplex stationär.

Alle Strahlen des Tangentencomplexes sind singulär.

Alle Geraden der Regelschaaren Γ und Λ sind Doppelstrahlen des Tangentencomplexes, wie wir oben fanden. Da aber diese Geraden ganz der Fläche F^2 angehören, so ist jeder ihrer Punkte, als Punkt der F^2, nach dem eben erhaltenen Resultate stationärer Punkt, und jede Ebene durch eine von diesen Geraden ist, als Berührungsebene der F^2, stationäre Ebene.

Solche Doppelstrahlen aber, deren Punkte und Ebenen sämtlich stationär sind, heissen in der Theorie des Complexes 2. Grades stationäre Doppelstrahlen. Also gilt für die Geraden der Grundfläche folgender Satz:

Alle Geraden der Fläche F^2 sind stationäre Doppelstrahlen des Tangentencomplexes, d. i. jeder ihrer Punkte sendet zwei vereinigte Complexstrahlenbüschel aus, jede ihrer Ebenen enthält zwei vereinigte Complexstrahlenbüschel, mit unbestimmtem zugehörigen singulären Strahl.

4. Jeder Geraden l des Raumes wird in Bezug auf einen Complex 2. Grades eine bestimmte Fläche, die sogenannte Complexfläche (l), zugeordnet (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 513).

Für diese Complexfläche (l) bestehen vier Erzeugungsweisen, welche paarweise einander dual gegenüberstehen.

Sie entsteht erstens durch die Complexkegelschnitte in den Ebenen ξ durch l. Sie ist zweitens, dual dazu, die Enveloppe der Complexkegel der Punkte X auf l. Die erste Erzeugung giebt uns die Complexfläche (l) als Punktfläche,

die zweite als Ebenenfläche, da ja die Berührungsebenen der einhüllenden Kegel auch Tangentialebenen ihrer Enveloppe sind.

Ferner ist die Complexfläche (l) auch der Ort der Punkte, deren Complexkegel die Gerade l berühren, und wird schliesslich, dual dazu, von den Ebenen eingehüllt, deren Complexcurven die Gerade l treffen.

Alle vier Erzeugungsweisen der Complexfläche (l) werden wir benutzen, um die Frage nach der Complexfläche einer Geraden l in Bezug auf den Tangentencomplex der Fläche 2. Grades zu entscheiden.

Legt man durch die Gerade l die sämtlichen ∞^1 Ebenen, so liefern ihre Complexkegelschnitte, die ja in unserm Falle die Schnittkegelschnitte mit der F^2 sind, die Fläche F^2. Unter den Ebenen durch die Gerade l befinden sich aber die beiden Tangentialebenen an die F^2. Fasse ich einen beliebigen Punkt in einer dieser Tangentialebenen durch l auf, so ist diese Tangentialebene auch Berührungsebene seines Complexkegels, und die Tangente aus ihm an die F^2, welche in der gewählten Tangentialebene sich befindet, ist die einzige Erzeugende seines Complexkegels, welche die Gerade l trifft, d. i. die Gerade l berührt den Complexkegel dieses Punktes. Daraus folgt, dass auch die beiden Tangentialebenen aus l an die F^2 zur Complexfläche (l), als Punktfläche aufgefasst, gehören. Zu dieser Erkenntnis kann man aber auch mittelst der ersten Definition der Complexfläche gelangen. Denkt man sich nämlich eine der beiden Tangentialebenen aus l an die F^2 gelegt, so ist ihre Complexcurve als Strahlenerzeugnis der doppelt zu zählende Strahlenbüschel des Berührungspunktes. Bei einem solchen als Ausartung einer Curve 2. Klasse fallen für jeden Punkt der Ebene die beiden Tangenten zusammen, d. i. er ist Punkt der zugehörigen Punktcurve. Diese ist demnach unbestimmt, als Schnitt der beiden Tangentialebenen mit der F^2 erhält man ihre ganze Ebene.

Konstruire ich ferner die Complexkegel (X) aller Punkte von l, die ja in unserm Falle die Berührungskegel an die F^2 sind, so umhüllen diese die Fläche F^2. Der Complex-

kegelschnitt jeder beliebigen Ebene aus dem Bündel eines der beiden Schnitte $l\,F^2$ schneidet ersichtlich die Gerade l. Mithin gehören die beiden Bündel um die Schnitte der Geraden l mit der F^2 zu der Complexfläche (l), als Ebenenfläche betrachtet.

Somit gewinnen wir das Resultat:

Die Complexfläche (l) einer Geraden l in Bezug auf den Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades besteht als Punktfläche aus der F^2 und ihren beiden Berührungsebenen durch l, als Ebenenfläche aus der F^2 und den beiden Bündeln um die Schnitte $l\,F^2$.

Aus diesem Ergebnis ersehen wir, dass die Complexfläche (l) inbezug auf den vorliegenden Tangentencomplex die notwendigen Eigenschaften einer allgemeinen Complexfläche besitzt. Sie ist vierter Ordnung und vierter Klasse; die Gerade l ist Doppelgerade ihrer Complexfläche und Axe eines Büschels doppelter Berührungsebenen derselben.

Die Charakteristiken des Systems der Complexkegelschnitte.

5. Für das dreifach unendliche System der Complexcurven eines allgemeinen Complexes 2. Grades gelten folgende Charakteristiken:

$$\mu^3 = 1,\ \mu^2\nu = 4,\ \mu^2\rho = 2,\ \mu\nu^2 = 16,\ \mu\nu\rho = 8,$$
$$\mu\rho^2 = 4,\ \nu^3 = 48,\ \nu^2\rho = 32,\ \nu\rho^2 = 16,\ \rho^3 = 8.$$

(Sturm, Liniengeometrie Bd. III 529—32). Dabei bedeuten μ,ν,ρ bezw. die Elementarbedingungen für einen Complexkegelschnitt, dass seine Ebene durch einen gegebenen Punkt gehe, dass er eine gegebene Gerade treffe oder eine gegebene Ebene berühre.

Gelten für das dreifach unendliche System der Complexkegelschnitte des Tangentencomplexes dieselben Charakteristiken oder weichen sie von denen des allgemeinen Falls ab? Wir werden im Folgenden sehen, dass die Charakteristiken des Systems der Complexcurven des Tangentencom-

plexes in den meisten Fällen von denen beim allgemeinen quadratischen Complex abweichen, dass nur in einzelnen Fällen eine Uebereinstimmung stattfindet.

Zunächst ist unmittelbar zu erkennen, *dass auch in unserem Falle die Charakteristik* $\mu^3 = 1$ *ist*, d. i. durch drei beliebige Punkte des Raumes geht nur die Ebene eines einzigen Schnittkegelschnitts. Die drei gegebenen Punkte bestimmen ja eindeutig eine Ebene, die aus der F^2 einen Kegelschnitt ausschneidet.

Fragen wir aber nach der Anzahl der Schnittkegelschnitte, deren Ebenen durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 gehen, während sie selbst eine gegebene Gerade m treffen, so werden wir eine Abweichung von der Charakteristik $\mu^{2\nu}$ des allgemeinen Falls erhalten. Alle Ebenen, deren Schnittkegelschnitte die Gerade m treffen, werden ersichtlich erschöpft durch die Ebenen der beiden Bündel um die beiden Schnittpunkte m F^2. Suche ich daher diejenigen Ebenen, welche ausserdem noch durch die beiden Punkte P_1 und P_2 gehen, so sind dies die beiden Ebenen, welche die Verbindungslinie P_1P_2 mit dem einen bezw. andern Schnittpunkt m F^2 verbinden.

Somit ergiebt sich, *dass die Charakteristik* $\mu^{2\nu}$ *in unserem Falle gleich 2 ist.*

Wodurch erklärt sich nun die Abweichung dieser Charakteristik von der beim allgemeinen Complex 2. Grades? Die Complexfläche der Geraden P_1P_2, als Punktfläche aufgefasst, ist doch beim Tangentencomplex der F^2 die Grundfläche F^2 und ihre beiden Berührungsebenen aus P_1P_2; die Schnittkegelschnitte in den Ebenen durch P_1P_2 erzeugen sie. Wäre nun die Complexfläche der Geraden P_1P_2 eine wirkliche Fläche 4. Ordnung, wie es ja beim allgemeinen Complex 2. Grades der Fall ist, nicht eine zerfallende, wie beim Tangentencomplex, so hätte die Gerade m mit ihr vier Schnittpunkte, nicht bloss zwei, und nach diesen vier Punkten gingen vier Ebenen aus P_1P_2, deren Complexkegelschnitte die Gerade m schneiden.

Der Grund der Abweichung der Charakteristik $\mu^2\nu$ von dem Werte 4 des allgemeinen Falls beruht also auf der Spezialität der Complexfläche einer Geraden in Bezug auf den Tangentencomplex.

Betrachten wir weiter die Charakteristik $\mu^2\rho$, so werden wir sie mit dem Werte 2 des allgemeinen Falls in Uebereinstimmung finden. Denn durch die Verbindungslinie $P_1 P_2$ der beiden gegebene Punkte gehen an den Schnittkegelschnitt der gegebenen Ebene π ersichtlich zwei berührende Ebenen; die beiden Tangenten von dem Schnittpunkt $(P_1 P_2, \pi)$ an den Schnittkegelschnitt (π) sind die Spuren dieser beiden berührenden Ebenen in der Ebene π. Für den Complexkegelschnitt jeder von den beiden Berührungsebenen ist ihre Spur in der π ebenfalls Tangente, d. i. die Schnittkegelschnitte in diesen beiden Ebenen durch $P_1 P_2$ berühren die Ebene π.

Also ist wirklich auch beim Tangentencomplex der F^2 die Charakteristik $\mu^2\rho$ gleich 2.

Wie steht es ferner mit der Charakteristik $\mu\nu^2$ beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades? Die Complexfläche einer Geraden l besteht doch als Ebenenfläche aus der Grundfläche F^2 und den Bündeln um die beiden Schnitte $l F^2$. Der Tangentialkegel eines Punktes P an diese Complexfläche besteht somit aus dem Tangentialkegel (P) an die F^2 und den beiden Ebenenbüscheln um die Verbindungslinien des Punktes P mit den beiden Schnitten $l F^2$; ich nenne diese beiden Verbindungslinien a_1, a_2. Da die Berührungsebenen des Kegels (P) nur Geradenpaare aus der F^2 ausschneiden, sind nur die Schnittkegelschnitte in den Ebenen der beiden Büschel eigentliche Complexkegelschnitte, deren Ebenen durch P gehen, während sie selbst die Gerade l treffen.

Machen wir dieselben Erwägungen für die Complexfläche einer zweiten Geraden l_1, so erhalten wir desgleichen, dass nur die Ebenen der beiden Ebenenbüschel um die Verbindungslinien a_3, a_4 des Punktes P mit den beiden Schnitten

$l_1 F^2$ Schnittkegelschnitte liefern, deren Ebenen durch P gehen, während sie selbst die Gerade l_1 treffen.

Daher schneiden die Schnittkegelschnitte in den vier Ebenen $a_1 a_3$, $a_1 a_4$, $a_2 a_3$, $a_2 a_4$, die als gemeinsame Berührungsebenen der beiden Tangentialkegel aus P an die beiden Complexflächen (l) und (l_1) anzusehen sind, sowohl die Gerade l als die Gerade l_1, während ihre Ebenen durch P gehen. Es gibt demnach vier Kegelschnitte in dem System der Complexcurven beim Tangentencomplex, welche zwei gegebene Gerade l und l_1 schneiden, während ihre Ebenen durch einen Punkt P gehen. *Die Charakteristik* $\mu\nu^2$ *ist also in unserem Falle gleich 4.*

Dieser Unterschied von der Charakteristik $\mu\nu^2 = 16$ des allgemeinen Falls hat wiederum seinen Grund in der Spezialität der Complexfläche einer Geraden in Bezug auf den Tangentencomplex. Denn wären die Complexflächen sowohl der Geraden l als der Geraden l_1 allgemeine, so hätten alle 16 gemeinsamen Berührungsebenen der beiden Tangentialkegel an sie mit derselben Spitze P, nicht bloss vier, wie sich in unserm Falle ergab, die Eigenschaft, dass ihre Complexcurven die Gerade l und die Gerade l_1 schneiden. Denn jede dieser Tangentialebenen ist ja als Berührungsebene beider Complexflächen (l) und (l_1) auch Berührungsebene je eines der diese Complexflächen einhüllenden Kegel; als solche aber muss ihre Complexcurve sowohl die l als die l_1, und zwar in den Spitzen der betreffenden einhüllenden Kegel, schneiden. Während also im allgemeinen Falle die Complexcurven aller dieser 16 gemeinsamen Berührungsebenen der beiden Tangentialkegel aus P an die beiden Complexflächen (l) und (l_1) die Geraden l und l_1 schneiden, haben in unserm Falle nur die vier Ebenen $a_1 a_3$, $a_1 a_4$, $a_2 a_3$, $a_2 a_4$ diese Eigenschaft, da ja alle andern gemeinsamen Berührungsebenen dieser beiden Tangentialkegel aus P auch Berührungsebenen der F^2 sind und als solche nur Geradenpaare ausschneiden, welche die beiden Geraden l und l_1 im allgemeinen nicht treffen.

Denkt man sich den Schnittkegelschnitt in einer Ebene π_1, aufgefasst als Erzeugnis seiner Tangenten, aus einem Punkte P projizirt, so hat der Schnittkegelschnitt in jeder Berührungsebene des entstehenden Kegels 2. Klasse in der π_1 eine Tangente, d. i. jeder dieser Kegelschnitte berührt die Ebene π_1. Es stellt somit dieser Kegel 2. Klasse die Gesamtheit aller Ebenen dar, welche durch P gehen und deren Schnittkegelschnitte die Ebene π_1 berühren. Fasse ich neben der Ebene π_1 noch eine zweite Ebene π_2 auf, so erhalte ich einen zweiten Kegel 2. Klasse mit derselben Spitze P, umhüllt von den Ebenen, welche durch P gehen und deren Complexkegelschnitte die Ebene π_2 berühren.

Diese beiden Kegel mit derselben Spitze P haben aber vier gemeinsame Berührungsebenen. Also gibt es vier Ebenen, deren Complexkegelschnitte sowohl die Ebene π_1 als die Ebene π_2 berühren, während sie selbst durch einen gegebenen Punkt P gehen.

Die Charakteristik $\mu\rho^2$ des Systems der Complexkegelschnitte bei dem vorliegenden Tangentencomplexe ist also, wie beim allgemeinen quadratischen Complex, *gleich 4.*

Wir haben oben gesehen, dass von den Berührungsebenen des Tangentialkegels eines Punktes P an die Complexfläche einer Geraden l in Bezug auf den Tangentencomplex der F^2 nur die Ebenen der beiden Ebenenbüschel um die Verbindungslinien a_1, a_2 des Punktes P mit den beiden Schnittpunkten l F^2 Complexkegelschnitte liefern, deren Ebenen durch P gehen, während sie selbst die Gerade l treffen.

Ferner wissen wir, dass alle Ebenen, welche durch P gehen und deren Complexkegelschnitte eine Ebene π berühren, einen Kegel 2. Klasse umhüllen, nämlich den Kegel, welcher den Schnittkegelschnitt (π) aus P projizirt.

Die beiden Berührungsebenen nun, welche von a_1 und von a_2 an diesen Kegel 2. Klasse gelegt werden können, lehren uns, dass es vier Ebenen gibt, welche durch P gehen, deren Complexcurven eine Gerade l treffen und eine Ebene π berühren.

Die Charakteristik $\mu\nu\rho$ des Systems der Complexkegelschnitte beim Tangentencomplex der F^2 *ist also gleich 4*, während sie für das System des allgemeinen Complexes gleich 8 ist.

Fragen wir nach dem Grunde dieser Abweichung, so ist er wieder in der Spezialität der Complexfläche (l) zu suchen. Wäre die Fläche (l) nämlich eine allgemeine, dann hätte jede Berührungsebene des Tangentialkegels aus dem Punkte P an die Fläche (l) die Eigenschaft, dass ihre Complexcurve die Gerade l trifft. Die 8 gemeinsamen Berührungsebenen dieses Kegels 4. Klasse mit dem Kegel 2. Klasse, der den Schnittkegelschnitt (π) aus P projiziert, wären dann 8 Ebenen, welche die gewünschten drei Forderungen μ,ν,ρ erfüllen. In unserm Falle aber haben wir infolge der Spezialität der Complexfläche (l) nur zwei Ebenenbüschel mit sich schneidenden Axen anstelle des Tangentialkegels 4. Klasse aus P an die Fläche (l) und bekommen daher auch nur vier gemeinsame Berührungsebenen mit dem Kegel 2. Klasse, welcher die Curve (π) aus P projizirt.

Es seien zur weiteren Betrachtung zwei beliebige Gerade l_1 und l_2 gegeben, ihre Schnitte mit der Grundfläche F^2 seien A_1, B_1 bezw. A_2, B_2. Ersichtlich haben nur die Ebenen der vier Ebenenbüschel mit den Axen A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2 die Eigenschaft, aus der F^2 Kegelschnitte auszuschneiden, welche sowohl die Gerade l_1 als die Gerade l_2 treffen. Somit können wir sagen, dass alle Ebenen deren Schnittkegelschnitte zwei gegebene Gerade l_1 und l_2 treffen, einen ausgezeichneten Torsus 4. Klasse bilden, bestehend aus den vier genannten Ebenenbüscheln.

Wir finden uns hierbei in Uebereinstimmung mit einer Folgerung, die sich aus der bereits gewonnenen Charakteristik $\mu\nu^2 = 4$ ziehen lässt. Diese Charakteristik $\mu\nu^2 = 4$ besagt nämlich, dass von den Ebenen, deren Schnittkegelschnitte zwei gegebene Gerade treffen, vier durch einen Punkt gehen. Also ist 4 die Klasse des Torsus dieser Ebenen.

Denke ich mir jetzt den Schnittkegelschnitt einer Ebene π, so gehen doch von jedem der vier Ebenenbüschel mit

den Axen A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1B_2 zwei gemeinsame Berührungsebenen an diesen Kegelschnitt. Die Spur jeder dieser acht Ebenen in der Ebene π ist eine Tangente des Schnittkegelschnitts (π), also auch der Fläche F^2, d. i. die Kegelschnitte dieser acht Ebenen berühren die Ebene π. Es haben also diese acht Ebenen die Eigenschaft, dass ihre Kegelschnitte sowohl die beiden Geraden l_1 und l_2 treffen, als auch die Ebene π berühren. Damit erkennen wir, *dass die Charakteristik $\nu^2\rho$ für das System der Schnittkegelschnitte der F^2 gleich 8 ist.*

Suchen wir eine Begründung für diesen Unterschied von der Charakteristik $\nu^2\rho = 32$ des allgemeinen Falls, so brauchen wir nur an die Verschiedenheit der Charakteristik $\mu\nu^2$ in beiden Fällen zu denken. Während sich beim allgemeinen Complex 2. Grades auf Grund von $\mu\nu^2 = 16$ ein Torsus 16. Klasse ergibt, umhüllt von den Ebenen, deren Complexcurven zwei gegebene Gerade treffen, haben wir es in unserem Falle nur mit einem Torsus 4. Klasse zu tun, der mithin auch nur zu 8, nicht zu 32 gemeinsamen Berührungsebenen mit einem beliebigen Kegelschnitt π führen kann.

Es seien ferner eine Gerade l und eine Ebene π_1 gegeben; die beiden Schnittpunkte der Geraden l mit der Grundfläche F^2 seien A_1 und A_2. Jede Ebene, deren Schnittkegelschnitt die Gerade l trifft und die Ebene π_1 berührt, ist ersichtlich entweder eine Tangentialebene des Kegels, welcher den Schnittkegelschnitt (π_1) aus A_1 projizirt, oder eine Tangentialebene des Kegels, welcher den Kegelschnitt (π_1) aus A_2 projizirt. Es bilden somit die Ebenen aller Schnittkegelschnitte, welche eine Gerade l treffen und eine Ebene π_1 berühren, einen zerfallenden Torsus 4. Klasse, bestehend aus den beiden beschriebenen Kegeln.

Dass sich wirklich ein Torsus 4. Klasse ergeben musste, konnte bereits aus der Charakteristik $\mu\nu\rho = 4$ abgelesen werden, die sich ja in dem Sinne deuten lässt, dass alle Ebenen, deren Complexkegelschnitte eine gegebene Gerade

treffen und eine gegebene Ebene berühren, einen Torsus 4. Klasse bilden.

Denke ich mir jetzt den Kegelschnitt einer zweiten Ebene π_2, so schneidet doch sowohl der Kegel mit der Spitze A_1 als auch der Kegel mit der Spitze A_2 in die Ebene π_2 einen Kegelschnitt ein. Die je vier Tangenten, welche jeder dieser Kegelschnitte mit dem Schnittkegelschnitt (π_2) gemein hat, lehren mich, dass die beiden Kegel je vier Tangentialebenen haben, deren Schnittkegelschnitte auch die Ebene π_2 berühren, dass es mithin acht Ebenen gibt, deren Schnittkegelschnitte die Gerade l treffen und beide Ebenen, sowohl die Ebene π_1 als die Ebene π_2 berühren, *dass demnach die Charakteristik* $\nu\rho^2$ *gleich 8 ist.*

Die Abweichung von der Charakteristik $\nu\rho^2 = 16$ des allgemeinen Falls erklärt sich aus dem Umstande, dass wir es hier mit einem Torsus 4. Klasse zu tun haben, umhüllt von den Ebenen, deren Complexcurven eine Gerade l treffen und eine Ebene π_1 berühren, während beim allgemeinen Complexe 2. Grades dieser Torsus 8. Klasse ist, entsprechend dem Werte 8 der Charakteristik $\mu\nu\rho$. Daher erhalten wir auch nicht 16, sondern nur 8 gemeinsame Berührungsebenen dieses Torsus mit der Complexcurve einer zweiten Ebene π_2. Jede dieser gemeinsamen Berührungsebenen ist aber eine Ebene, welche den drei in der Charakteristik $\nu\rho^2$ gestellten Forderungen genügt.

Gegeben seien jetzt die Schnittkegelschnitte zweier Ebenen π_1 und π_2. Alle Ebenen, deren Schnittkegelschnitte die beiden Ebenen π_1 und π_2 berühren, umhüllen einen Torsus 4. Klasse, wie die Charakteristik $\mu\rho^2 = 4$ lehrt; durch einen beliebigen Punkt gehen vier Ebenen dieses Torsus. Die acht gemeinsamen Berührungsebenen dieses Torsus mit dem Schnittkegelschnitt einer dritten Ebene π_3 sind acht Ebenen, deren Schnittkegelschnitte sowohl die beiden Ebenen π_1 und π_2 als auch die Ebene π_3 berühren.

Also ist die Charakteristik ρ^3 *auch beim Tangentencomplex der* F^2 *gleich 8.*

Der Grund für diese Uebereinstimmung der Charakteristik p^3 beruht auf der Gleichheit der Werte der Charakteristik $\mu\rho^2$ in beiden Fällen. Denn auch beim allgemeinen Complexe 2. Grades ist, auf Grund von $\mu\rho^2 = 4$, der Torsus der Ebenen, deren Complexcurven die beiden Ebenen π_1 und π_2 berühren, vierter Klasse, dessen acht gemeinsame Berührungsebenen mit dem Schnittkegelschnitt (π_3 Ebenen sind, deren Complexkegelschnitte alle drei Ebenen π_1, π_2, π_3 berühren.

Welchen Wert hat nun die letzte Charakteristik ν^3 des Systems der Complexkegelschnitte bei unserem Tangentencomplex? Ist sie auch gleich 48, wie im allgemeinen Falle?

Waren nur zwei Gerade l_1, l_2 mit den Schnittpunkten A_1, B_1; A_2, B_2 gegeben, dann bildeten die Ebenen, deren Complexkegelschnitte diese beiden Geraden trafen, einen ausgezeichneten Torsus 4. Klasse, nämlich die vier Ebenenbüschel mit den Axen $A_1 A_2$, $A_1 B_2$, $B_1 A_2$, $B_1 B_2$. Kommt jetzt noch eine dritte Gerade l_3 hinzu, mit den Schnittpunkten A_3, B_3, dann sind ersichtlich die je zwei Ebenen, welche aus jedem der vier Ebenenbüschel nach den beiden Punkten A_3, B_3 gehen, die einzigen Ebenen, deren Schnittkegelschnitte die drei Geraden l_1, l_2, l_3 treffen. Somit erkennen wir, *dass die Charakteristik ν^3 für das System der Complexcurven beim Tangentencomplex gleich 8 ist.*

Wie ist nun diese Abweichung von dem Werte 48 des allgemeinen Falls zu erklären?

Beim allgemeinen Complex 2. Grades haben wir genau zwischen den ∞^2 singulären Ebenen des Complexes und den 16 stationären Ebenen zu unterscheiden. Beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades aber sind die singulären Ebenen, nämlich die Berührungsebenen der Fläche F^2, nicht bloss singulär, sondern sämtlich stationär; die Complexpunktepaare in diesen Ebenen vereinigen sich in den Strahlenbüschel um den Berührungspunkt dieser Ebenen. Da somit überhaupt keine Complexpunktepaare beim Tangentencomplex der F^2 vorhanden sind, können wir auch von den Charakteristiken des Systems der Complexpunktepaare nicht reden, wir müssen

sie gleich Null setzen. Es ist also insbesondere in unserem Falle die Charakteristik $\eta\nu^2$, d. i. die Anzahl der Complexpunktepaare, deren Doppellinien zwei Gerade treffen, gleich 0.

Berücksichtigen wir dies in der Formel

$$2\,\nu^3 = \nu^2\rho + 2\,\mu\nu^2 + \eta\nu^2,$$

welche ja im allgemeinen Falle den Wert von ν^3 liefert (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 532), und setzen wir die bekannten Werte der Charakteristiken $\nu^2\rho$, $\mu\nu^2$ ein, so bekommen wir in der Tat $\nu^3 = 8$.

Fassen wir die ganzen Erörterungen über das System der Complexcurven des Tangentencomplexes zusammen, so erhalten wir folgendes Gesamtresultat:

Für das dreifach unendliche System der Complexkegelschnitte beim Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades gelten folgende Charakteristiken:

$\mu^3 = 1$, $\mu^2\nu = \mu^2\rho = 2$, $\mu\nu^2 = \mu\nu\rho = \mu\rho^2 = 4$, $\nu^3 = \nu^2\rho = \nu\rho^2 = \rho^3 = 8$.

Die Correspondenzen, welche durch den Tangentencomplex auf einer Geraden hervorgerufen werden.

6. Auf einer beliebigen Geraden m ruft jeder allgemeine Complex 2. Grades drei Correspondenzen hervor (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 511).

Die erste ist eine involutorische Correspondenz $[2]_P$ zwischen den Punkten der Geraden m; es entsprechen sich in ihr zwei Punkte von m, welche Schnitte dieser Geraden mit der Complexcurve in irgend einer Ebene durch sie sind.

Die zweite ist eine involutorische Correspondenz $[2]_E$ zwischen den Ebenen der Geraden m; es entsprechen sich in ihr zwei Ebenen durch m, welche den Complexkegel aus irgend einem Punkte von m berühren.

Die dritte ist eine Correspondenz $[2,2]_m$ zwischen den Punkten und Ebenen der Geraden m; es entsprechen in ihr jedem Punkte X von m die Berührungsebenen aus m an den Complexkegel (X), jeder Ebene ξ durch m entsprechen die Schnitte der Complexcurve (ξ) mit m.

Was wird nun aus diesen Correspondenzen beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades? Wie steht es zunächst mit der involutorischen Correspondenz $[2]_p$ in diesem Falle? Ruft der Tangentencomplex der F^2 überhaupt auf der Geraden m diese Correspondenz hervor?

Angenommen diese Correspondenz bestände, dann würden sich ja in ihr zwei Punkte auf m entsprechen, welche Schnitte der Geraden m mit der Complexcurve in irgend einer Ebene durch sie sind. Da aber die Complexkegelschnitte in den Ebenen durch m ihre Schnittkegelschnitte mit der F^2 sind, so sind ersichtlich die beiden Schnittpunkte von m mit F^2 das einzige Punktepaar auf m, welche so beschaffen sind, und zwar sind sie Schnitte der Complexkegelschnitte aller Ebenen durch m. Jeder andere Punkt der Geraden m liegt sicher nicht auf dem Schnittkegelschnitt einer Ebene durch m. Daraus folgern wir, dass die Correspondenz $[2]_p$ durch den Tangentencomplex der F^2 auf m nicht induzirt werden kann.

Von dieser Tatsache können wir uns aber noch dadurch überzeugen, dass wir nach Analogie des allgemeinen Falls die beiden Punkte auf der Geraden m zu finden suchen, welche einem beliebigen Punkte X auf m in dieser Correspondenz entsprechen würden.

Im allgemeinen Falle erhält man diese beiden Punkte in folgender Weise. Man legt durch die Gerade m an den Complexkegel des Punktes X die beiden Tangentialebenen. In jeder dieser beiden Ebenen muss die Complexcurve durch den Punkt X hindurchgehen. Denn die beiden unendlich nahen Kanten, in denen jede dieser Ebenen den Kegel (X) schneidet, sind für die Complexcurve in dieser Ebene zwei unendlich nahe in X sich schneidende Tangenten. Also ist X ein Punkt dieser Complexcurve. Die beiden weiteren Schnitte der beiden Complexcurven mit der Geraden m sind die dem Punkte X in der involutorischen Correspondenz $[2]_p$ entsprechenden Punkte. Nun sind doch in unserem Falle die beiden Tangentialebenen aus m an den Tangentialkegel (X) die beiden Berührungsebenen aus m an die Grund-

fläche F^2. Die Complexkegelschnitte in ihnen sind die doppelten Tangentenbüschel, und bei einem solchen, als Ausartung einer Curve 2. Klasse, ist die zugehörige Punktcurve, wie wir bereits in Nr. 4 sagten, unbestimmt, mit der ganzen Ebene zusammenfallend. Also gehen die beiden Punktcurven in den beiden Tangentialebenen zwar durch den Punkt X hindurch, wie im allgemeinen Fall, aber die Gerade m hat mit ihnen nicht bloss je einen weiteren Schnitt, sondern je ∞^1. Wir bekommen somit keine zwei dem Punkte X entsprechenden Punkte — entsprechend, wie es die involutorische Correspondenz $[2]_P$ verlangen würde, woraus aufs neue folgt, dass der Tangentencomplex der F^2 die Correspondenz $[2]_P$ auf der Geraden m nicht induzirt.

Wir müssen somit sagen:

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades ruft auf einer Geraden m die involutorische Correspondenz $[2]_P$ des allgemeinen Falls nicht hervor.

Auch die involutorische Correspondenz $[2]_E$ kann auf der Geraden m nicht entstehen, wie man sich durch eine zu der vorigen duale Betrachtungsweise klar macht. Man findet, dass die beiden Berührungsebenen aus m an die F^2 das einzige Paar von Ebenen ist, die den Complexkegel eines Punktes auf m berühren, und zwar gleich aller Punkte von m, während jede andere Ebene durch m nicht Tangentialebene des Complexkegels eines Punktes auf m ist. Wenn wir schliesslich auch hier nach Analogie des allgemeinen Falls die beiden Ebenen zu konstruiren suchen, welche einer beliebigen Ebene ξ durch m in der Correspondenz $[2]_E$ entsprechen würden, so erhalten wir nicht zwei bestimmte der Ebene ξ entsprechende Ebenen, sondern ∞^1. Daraus schliessen wir, dass die involutorische Correspondenz $[2]_E$ in dem Ebenenbüschel der Geraden m nicht entsteht.

Wir gewinnen somit das Resultat:

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades ruft in dem Ebenenbüschel einer Geraden m die involutorische Correspondenz $[2]_E$ des allgemeinen Falls nicht hervor.

Wir wollen schliesslich beweisen, dass die dritte Correspondenz $[2,2]_m$ in unserm Falle auf der Geraden m zwar zustande kommt, aber ausartet.

Fasst man nämlich einen beliebigen Punkt X auf m ins Auge, so entsprechen ihm immer die beiden Berührungsebenen aus m an die Grundfläche F^2. Denn der Complexkegel des Punktes X ist sein Tangentialkegel an die F^2, und die beiden Berührungsebenen aus m an diesen Kegel sind die beiden Berührungsebenen aus m an die F^2. Ferner entsprechen jeder Ebene ξ durch m die beiden Schnittpunkte der Geraden m mit der F^2, da ja die Complexcurven in den Ebenen durch m die Schnittkegelschnitte mit der F^2 sind und die Schnitte der Geraden m mit diesen Schnittkegelschnitten mit ihren Schnitten mit der Fläche F^2 identisch sind. Demnach können wir als Ergebnis festhalten:

Die Correspondenz $[2,2]_m$ artet beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades aus; jedem Punkte auf m entsprechen die beiden Berührungsebenen aus m an die F^2, jeder Ebene durch m entsprechen die beiden Schnittpunkte von m mit der F^2.

Die Polare einer Geraden, die Polarebene eines Punktes in Bezug auf den Tangentencomplex.

7. Wir wenden uns jetzt weiter zu der Entscheidung der Frage, welches die Polare einer Geraden l in Bezug auf den Tangentencomplex der F^2 ist.

Die Polare einer Geraden l in Bezug auf den allgemeinen Complex 2. Grades ist sowohl der Ort der Pole von l in Bezug auf die Complexkegelschnitte in den ∞^1 Ebenen ξ durch l als auch der Ort der Polarebenen von l in Bezug auf die Complexkegel der ∞^1 Punkte X auf l (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 512).

Beim Tangentencomplex der F^2 sind, wie wir wissen, die Complexkegelschnitte (ξ) in den Ebenen durch l und die Complexkegel (X) der Punkte auf l die Schnittkegelschnitte mit der F^2 bezw. die Tangentialkegel an die F^2.

Greife ich nun einen bestimmten Punkt X auf l heraus, so muss seine Polarebene in Bezug auf die F^2, wie die Polarebenen aller Punkte auf l, durch die Polare l' der Geraden l bezüglich der F^2 hindurchgehen. Man erhält doch die Polarebene des Punktes X, indem man sämtliche ∞^2 Ebenen durch X hindurchlegt und diese mit der F^2 schneidet; die Polaren von X in Bezug auf die Schnittkegelschnitte dieser Ebenen erfüllen die Polarebene des Punktes X. Unter den Ebenen durch X befinden sich aber die ∞^1 Ebenen des Büschels der Geraden l. Die Polaren von X in Bezug auf die von diesen Ebenen ausgeschnittenen Kegelschnitte gehen je durch den Pol der Geraden l bezüglich des ausgeschnittenen Kegelschnitts. Diese Pole aber erfüllen die Polare l_1' der Geraden l in Bezug auf den Tangentencomplex. Andererseits aber liegen jene durch diese Pole hindurchgehenden Polaren von X in der Polarebene von X nach der F^2. Folglich muss die Polarebene des Punktes X und ebenso die Polarebene jedes Punktes auf l durch die Polare l_1' in Bezug auf den Tangentencomplex hindurchgehen, d. i. die Polare l_1' bezüglich des Tangentencomplexes ist mit der Polaren l' in Bezug auf die Fläche F^2 identisch.

Die Polare einer beliebigen Geraden l in Bezug auf den Tangentencomplex ist die Polare in Bezug auf die Grundfläche F^2.

Weil in unserem Falle die Polare von l in Bezug auf den Tangentencomplex mit derjenigen bezüglich der Grundfläche identisch ist, so ist das Verhalten zweier polarer Geraden l und l' in Bezug auf den Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades reciprok, während bei einem allgemeinen Complex 2. Grades zwei polare Geraden nicht reciprok sind.

Ist die Gerade l eine Tangente der F^2, dann behaupte ich, dass jede andere Tangente in demselben Berührungspunkte ihre Polare bezüglich des Tangentencomplexes ist. Legt man nämlich die ∞^1 Ebenen durch die Tangente l, so ist, mit einer einzigen Ausnahme, der Pol dieser Tangente in Bezug auf die ausgeschnittenen Kegelschnitte immer ihr Berührunspunkt L. Die Ausnahme tritt ein, wenn wir die F^2 mit

der zugehörigen Tangentialebene schneiden. Der Pol der Tangente l in Bezug auf den Complexkegelschnitt dieser Tangentialebene, den doppelten Tangentenbüschel, ist jeder Punkt der Tangentialebene. Nun erfüllen doch die Pole der Tangente l in Bezug auf die von den ∞^1 Ebenen durch X ausgeschnittenen Kegelschnitte die Polare l'. Da diese Pole der Berührungspunkt L und alle andern Punkte der zugehörigen Tangentialebene sind, so ergibt sich in der Tat, dass jede andere Tangente in dem Berührungspunkt der gegebenen Tangente ihre Polare ist.

Die Polare einer Tangente der F^2 ist jede andere Tangente in dem Berührungspunkt der gegebenen.

Unter der Polarebene eines Punktes P in Bezug auf einen allgemeinen Complex 2. Grades versteht man die Polarebene (dritte Polare) des Punktes P in Bezug auf die singuläre Fläche Φ des Complexes (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 573). In unserem Falle ist aber die singuläre Fläche des Tangentencomplexes die doppelt gerechnete Grundfläche. Daher vereinigen sich in der Relation für die dritte Polarebene des Punktes P in Bezug auf die singuläre Fläche Φ des allgemeinen Complexes 2. Grades

$$\frac{4}{PO} \quad \frac{1}{PA_1} \quad \frac{1}{PA_2} \quad \frac{1}{PA_3} \quad \frac{1}{PA_4},$$

in welcher die Punkte A_i die Schnittpunkte mit der singulären Fläche bedeuten, je zwei von den vier Punkten A_i, wodurch diese Relation in die für die erste Polarebene des Punktes P nach der gegebenen F^2 übergeht:

$$\frac{2}{PO} = \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_3}.$$

Mithin gewinnen wir das Ergebnis:

Die Polarebene eines Punktes P in Bezug auf den Tangentencomplex der Fläche 2. Grades ist die Polarebene nach der F^2.

Die einem Strahlenbüschel, einem Punkte, einer Ebene durch den Complex zugeordneten Gebilde.

8. In Sturm's Liniengeometrie wird bewiesen (Bd. III 567), dass die Polaren l' aller Strahlen l eines Büschels (P, π) in Bezug auf den allgemeinen Complex 2. Grades eine Regelfläche 3. Grades bilden, von welcher die Polare von π in Bezug auf den Complexkegel (P) doppelte und die Polare von P in Bezug auf den Complexkegelschnitt (π) einfache Leitgerade ist.

Beim Tangentencomplex der F^2 sind ja, wie wir eben erkannt haben, die Polaren aller Strahlen des Büschels (P, π) zu ihnen bezüglich der F^2 polar. Somit bilden die Polaren l' der Geraden l des Büschels (P, π) einen Strahlenbüschel, mit dem Pole der Ebene π als Scheitel und der Polarebene des Punktes P als Ebene. Unter den Geraden l des Büschels (P, π) befinden sich aber zwei ausgezeichnete, nämlich die beiden in den Büschel (P, π) fallenden Complexstrahlen, die beiden an die Schnittkurve (π) von P gehenden Tangenten. Da nun jeder Tangente von F^2 alle andern Tangenten ihres Berührungspunktes polar sind, so erkennen wir, dass zu dem Ort der Polaren l' auch die beiden Tangentenbüschel der Berührungspunkte der beiden von P in π an die F^2 gehenden Tangenten gehören.

Somit haben wir das Ergebnis:

Die cubische Regelfläche, welche durch die Polaren l' der Strahlen l eines Büschels (P, π) in Bezug auf jeden Complex 2. Grades gebildet wird, zerfällt beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades in drei Strahlenbüschel. Das eine Strahlenbüschel hat den Pol der Ebene π zum Scheitel und die Polarebene des Scheitels P zur Ebene. Die beiden andern Strahlenbüschel sind die Tangentenbüschel in den Berührungspunkten der beiden von P in π an die Fläche gehenden Tangenten.

9. Jedem Punkte P sind in Bezug auf einen allgemeinen Complex 2. Grades zwei Congruenzen zugeordnet (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 570):

Die Congruenz (2,3)' der Polaren der Strahlen des Bündels P,

Die Congruenz (2,3)'' derjenigen Geraden, welche die Strahlen des Bündels P zu Polaren haben, oder damit identisch

Die Congruenz der Polaren des Scheitels P in Bezug auf die Complexcurven in den Ebenen des Bündels P.

Wie steht es nun mit diesen Congruenzen bei dem Tangentencomplex der Fläche 2. Grades? Jede Gerade l und ihre bezüglich des Tangentencomplexes polare Gerade l' sind ja auch bezüglich der Grundfläche F^2 polare Geraden, wie wir wissen. Fassen wir daher alle ∞^2 Geraden des Bündels P auf, so muss die Polarebene π des Punktes P durch die Polaren dieser Geraden hindurchgehen, d. i. die Polaren der Geraden des Bündels P liegen in der Polarebene des Punktes P, sie erfüllen das Strahlenfeld dieser Ebene. Unter den Geraden des Bündels P befinden sich aber auch die Erzeugenden des Tangentialkegels (P). Da diese Geraden Tangenten der F^2 sind, so ist ihnen jede andere Tangente in ihrem Berührungspunkt polar, wie wir sahen. Also gehören die ∞^1 Tangentenbüschel längs des Berührungskegelschnitts des Tangentialkegels (P), deren Ebenen ja durch P gehen, ebenfalls zu dem Orte der Polaren der Geraden des Bündels P.

Diese ∞^1 Tangentenbüschel längs des Berührungskegelschnitts des Kegels (P) bilden ersichtlich eine Congruenz 2. Grades. Denn der Berührungskegelschnitt eines zweiten Tangentialkegels (P_1) hat mit der Berührungscurve des Tangentialkegels (P) zwei Punkte gemein. Die Strahlenbüschel in den Berührungsebenen dieser beiden Punkte senden nach dem Punkte P_1 je einen Congruenzstrahl. Also ist die fragliche Congruenz 2. Ordnung. Ebenso hat der Schnittkegelschnitt einer beliebigen Ebene π mit dem Berührungskegelschnitt des Tangentialkegels (P) zwei Punkte gemein. Die Tangentenbüschel dieser beiden Punkte senden in die beliebige Ebene je einen Congruenzstrahl. Also ist die fragliche Congruenz auch 2. Klasse.

Wir können somit sagen:

Die Polaren der Strahlen des Bündels P in Bezug auf den Tangentencomplex der F^2 erzeugen eine Congruenz, welche aus dem Strahlenfelde in der Polarebene von P nach der Grundfläche und der Congruenz 2. Grades der Tangenten von F^2 besteht, die in den durch P gehenden Berührungsebenen liegen.

Fragen wir weiter nach den Geraden, welche einen Strahl des Bündels P zur Polaren haben, so muss jede dieser Geraden in der Polarebene π von P liegen, weil ja die Polare durch P geht; dies gilt allerdings nur dann, wenn die Gerade des Bündels P eine beliebige Gerade ist. Ist sie dagegen eine von den Tangenten des Tangentialkegels (P), dann haben alle andern Tangenten in der zugehörigen Berührungsebene diese Gerade des Bündels P zur Polaren. Daraus folgt, dass auch hier die ∞^1 Tangentenbüschel in den Berührungsebenen durch P zu dem Ort der Geraden gehören, welche die Geraden des Bündels P zur Polaren haben.

Die Geraden des Raumes, welche die Strahlen des Bündels P in Bezug auf den Tangentencomplex der F^2 zu Polaren haben, erfüllen mithin dieselbe Congruenz (2,3), gebildet durch das Strahlenfeld in der Polarebene π von P nach der F^2 und die Congruenz 2. Grades der Tangenten von F^2, die in den durch P gehenden Berührungsebenen liegen.

Die Identität dieser beiden Congruenzen kann man auch mittelst eines in Nr. 7 erkannten Ergebnisses beweisen. Wenn nämlich zwei in Bezug auf den Tangentencomplex der F^2 polare Geraden zu einander reciprok sind, so sind die Geraden, welche die Strahlen des Bündels P zu Polaren haben, auch Polaren dieser Strahlen. Also fällt der zweite Ort mit dem ersten zusammen.

Frage ich drittens nach dem Orte der Polaren des Scheitels P in Bezug auf die Complexkegelschnitte in den Ebenen des Bündels P, so ist diese Frage von vornherein mit der Frage nach der Polarebene des Punktes P identisch; diese Polaren des Punktes P erfüllen ja seine Polarebene.

Unter den Ebenen des Bündels P befinden sich aber die Berührungsebenen des Tangentialkegels (P). Der Complexkegelschnitt in jeder dieser Ebenen ist der doppelte Tangentenbüschel, und die Polare des Punktes P in Bezug auf dieses Doppelbüschel ist jede Gerade desselben. Daraus erhellt, dass auch hier wiederum die ∞^1 Tangentenbüschel in den durch P gehenden Berührungsebenen zu dem fraglichen Orte gehören.

Wir sehen somit, dass alle drei Congruenzen, die einem Punkte P in Bezug auf einen Complex 2. Grades zugeordnet sind, in unserem Falle sich vereinigen. Damit ist auch an diesem Spezialfall eines Complexes 2. Grades die Richtigkeit des allgemeinen Satzes verifiziert, dass der Ort der Geraden, welche die Strahlen des Bündels P zu Polaren haben, und der Ort der Polaren des Scheitels P in Bezug auf die Complexcurven in den Ebenen des Bündels P identisch sind.

Jedenfalls können wir die vorausgehenden Erörterungen zu folgendem Gesamtresultat zusammenfassen:

Die einem Punkte P zugehörigen Congruenzen (2,3)' und (2,3)'' des allgemeinen Falls vereinigen sich beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades in eine Congruenz, welche aus dem Strahlenfelde in der Polarebene von P nach der F^2 und der Congruenz 2. Grades der Tangenten von F^2 besteht, die in den durch P gehenden Berührungsebenen liegen.

10. Wie jedem Punkte P des Raumes in Bezug auf einen Complex 2. Grades drei Congruenzen zweiter Ordnung, dritter Klasse zugeordnet sind, so gehören auch, dual dazu, jeder Ebene π des Raumes drei Congruenzen dritter Ordnung, zweiter Klasse zu, von denen aber wiederum zwei identisch sind (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 570):

Alle Polaren der Strahlen des Feldes π bezüglich des Complexes F^2 bilden die eine Congruenz (3,2)'.

Alle Geraden, welche die Strahlen des Feldes π zur Polaren haben, erzeugen die zweite Congruenz (3,2)'', welche mit der dritten Congruenz, erzeugt durch die Polaren der Ebene π in Bezug auf die Complexkegel ihrer Punkte, identisch ist. Somit sind auch hier im Grunde jeder Ebene π des

Raumes in Bezug auf einen Complex 2. Grades nur zwei Congruenzen (3,2)' und (3,2)'' zugeordnet.

Beim Tangentencomplex der F^2 liegen diese Verhältnisse folgendermassen.

Da die Polare einer Geraden bezüglich des Tangentencomplexes auch Polare bezüglich der F^2 ist, so gehen die Polaren aller Geraden der Ebene π durch den Pol der Ebene π nach der F^2. Unter den Geraden der π befinden sich aber als ausgezeichnete die Tangenten ihres Schnittkegelschnitts (π). Zu jeder dieser Tangenten ist jede weitere Tangente der F^2 in ihrem Berührungspunkte polar.

Mithin erkennen wir, dass die Congruenz (3,2)' der Polaren der Strahlen der Ebene π bezüglich des Tangentencomplexes aus dem Bündel um den Pol der Ebene π nach der Grundfläche und den sämtlichen Tangenten längs der Schnittcurve (π) besteht.

Alle Geraden des Raumes, welche die Strahlen des Feldes π in Bezug auf den Tangentencomplex zu Polaren haben, müssen, weil sie ja auch bezüglich der F^2 polar sind, durch den Pol der Ebene π nach der F^2 gehen, vorausgesetzt, dass die Strahlen des Feldes π beliebig sind. Betrachte ich dagegen eine Tangente der Schnittcurve (π), so hat jede weitere Tangente ihres Berührungspunktes sie zur Polaren; denn jede Tangente der F^2 hat jede andere Tangente in ihrem Berührungspunkte zur Polaren.

Also sehen wir, dass die Congruenz (3,2)'' der Geraden, welche die Strahlen des Feldes π zu Polaren haben, ebenfalls aus dem Bündel um den Pol der Ebene nach der Grundfläche und den sämtlichen Tangenten längs der Schnittcurve (π) besteht.

Berücksichtigen wir auch hier die in Nr. 7 bewiesene Tatsache, dass zwei bezüglich des Tangentencomplexes polare Geraden reciprokes Verhalten haben, so folgt, dass alle Geraden, welche die Strahlen des Feldes π zu Polaren haben, auch Polaren dieser Strahlen sind, womit die Identität der beiden ersten Congruenzen, die einer Ebene π zugeordnet sind, zum zweiten Mal erwiesen ist.

Fragen wir nach der dritten Congruenz, von der wir ja bereits wissen, dass sie mit der zweiten und also auch mit der ersten identisch ist, so gilt folgendes. Die Polaren der Ebene π in Bezug auf die Complexkegel der Punkte von π, die ja in unserm Falle Tangentialkegel an die F^2 sind, laufen sämtlich durch einen und denselben Punkt, nämlich den Pol der Ebene π bezüglich der F^2, vorausgesetzt, dass die Punkte der Ebene π beliebige sind. Betrachtet man aber die Punkte des Schnittkegelschnitts (π), so sind doch in Bezug auf die Complexkegel dieser Punkte von π, also in Bezug auf die doppelten Tangentenbüschel in diesen Punkten, alle Tangenten in dem betreffenden Punkte zur Ebene π polar.

Somit erkennen wir, dass die dritte Congruenz in der Tat mit der zweiten und ersten zusammenfällt, insofern sie ebenfalls aus dem Bündel um den Pol der Ebene π nach der F^2 und den sämtlichen Tangenten längs π besteht.

Erinnern wir uns der in Nr. 9 erkannten Tatsache, dass alle Tangenten längs eines Kegelschnitts der F^2 eine Congruenz 2. Grades bilden, so können wir diese Erörterungen in folgendem Resultate zusammenfassen:

Die einer Ebene (π) zugehörigen Congruenzen $(3,2)'$ und $(3,2)''$ des allgemeinen Falls vereinigen sich beim Tangentencomplex der Fläche 2. Grades in eine Congruenz, welche aus dem Strahlenbündel um den Pol von π nach der F^2 und der Congruenz 2. Grades der Tangenten besteht, welche die F^2 längs des Schnittkegelschnitts (π) berühren, also in den Berührungsebenen der F^2 liegen, welche durch den Pol der Ebene π hindurchgehen.

Die Durchmesser und Cylinderaxen des Tangentencomplexes.

11. Die Polaren zu den Geraden der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ bezüglich eines quadratischen Complexes heissen die Durchmesser des Complexes (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 582).

Da aber die Polare l' einer Geraden l bezüglich des Tangentencomplexes auch Polare zu ihr in Bezug auf die Grundfläche F^2 ist, *so sind die Durchmesser des Tangentencomplexes identisch mit den Durchmessern der Grundfläche F^2.* Stellt man sich ferner die beiden der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf einen Complex 2. Grades zugehörigen Congruenzen (3,2)' und (3,2)'' her, so erhält man zwei für den Complex ausgezeichnete Congruenzen, nämlich die Congruenz der Durchmesser und die Congruenz der Cylinderaxen des Complexes 2. Grades. Die Congruenz der Cylinderaxen des Complexes 2. Grades erhält man am besten in der Weise, dass man die der Ebene $\mathfrak{E}$ zugehörige Congruenz (3,2)'' auffasst als Ort der Polarstrahlen der Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf die Kegel aus den Punkten der unendlich fernen Ebene, also in Bezug auf Cylinder; diese Polarstrahlen sind die Axen dieser Cylinder.

Nun ist doch die der Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf den Tangentencomplex der F^2 zugehörige Congruenz (3,2)', wie wir in Nr. 10 erkannten, eine Congruenz, welche aus dem Strahlenbündel um den Pol der Ebene $\mathfrak{E}$ nach der F^2 und der Congruenz 2. Grades der Tangenten von F^2 besteht, welche die F^2 längs des unendlich fernen Kegelschnitts ($\mathfrak{E}$) berühren. Da aber der Pol der Ebene $\mathfrak{E}$ nach der F^2 der Mittelpunkt der F^2 ist, da ferner die Tangenten der F^2 längs des Kegelschnitts ($\mathfrak{E}$) als zugehörige Berührungsebenen an die F^2 die Tangentialebenen des Asymptotenkegels, die Berührungsebenen an die F^2 aus dem Centrum, haben, so können wir sagen:

Die Congruenz der Durchmesser des Tangentencomplexes besteht aus dem Bündel der Durchmesser der Grundfläche F^2 und der Congruenz 2. Grades der Tangenten von F^2, welche in den Tangentialebenen des Asymptotenkegels der F^2 liegen.

Nun wissen wir aber, dass die beiden einer Ebene zugeordneten Congruenzen (3,2)' und (3,2)'' bezüglich des Tangentencomplexes der Fläche 2. Grades identisch sind. Daher können wir fortfahren:

Auch die Congruenz der Cylinderaxen des Tangentencomplexes besteht aus dem Bündel der Durchmesser der Grundfläche F^2 und der Congruenz 2. Grades der Tangenten von F^2, welche in den Tangentialebenen des Asymptotenkegels der F^2 liegen.

Ist δ eine unendlich ferne Gerade und d der zugehörige Durchmesser, so werden in der Theorie des quadratischen Complexes alle Ebenen von der Stellung δ zum Durchmesser d conjugiert genannt; desgleichen heisst der Durchmesser d zu diesen Ebenen conjugiert.

Nun sind aber beim Tangentencomplex die unendlich ferne Gerade δ und der zugehörige Durchmesser d nicht bloss bezüglich des Tangentencomplexes polar, sondern auch bezüglich der Grundfläche F^2. Mithin sind alle Ebenen von der Stellung δ auch bezüglich der F^2 zum Durchmesser d, der ja auch Durchmesser der F^2 ist, conjugiert.

Sind somit ein Durchmesser des Tangentencomplexes und eine Stellung von parallelen Ebenen in Bezug auf den Tangentencomplex conjugiert, dann sind sie auch conjugierte Durchmesser und Ebenen der Grundfläche F^2.

Denkt man sich daher eine Stellung δ von parallelen Ebenen und schneidet man jede Ebene dieser Stellung mit der F^2, so erfüllen die Mittelpunkte aller dieser Schnittkegelschnitte bekanntlich den zu dieser Stellung δ conjugierten Durchmesser d. Übertragen wir diese Tatsache auf den Tangentencomplex der F^2, so können wir sagen:

Ein Durchmesser d des Tangentencomplexes ist der Ort der Mittelpunkte der Complexkegelschnitte in den conjugierten Ebenen.

Ferner lässt sich zeigen, *dass zwei bezüglich des Tangentencomplexes conjugierte Durchmesser auch solche in Bezug auf die Grundfläche sind.*

Zwei Durchmesser d und d_1 eines Complexes 2. Grades heissen dann conjugiert, wenn sie nach unendlich fernen Punkten gehen, die in Bezug auf die unendlich ferne Complexcurve ($\mathfrak{C}$) conjugiert sind. In unserm Falle ist aber die ($\mathfrak{C}$) der Schnittkegelschnitt der unendlich fernen Ebene mit

der F^2. Also gehen die beiden Durchmesser d und d_1, die ja auch Durchmesser der F^2 sind, nach unendlich fernen Punkten, die in Bezug auf den Schnitt der F^2 mit der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ conjugiert sind, d. i. d und d_1 sind auch bezüglich der F^2 conjugiert.

Die Systeme von parabolischen Strahlennetzen im Tangentencomplex.

12. Ich denke mir jetzt durch die Regelschaar Γ von Doppelstrahlen des Tangentencomplexes und eine beliebige Tangente der Grundfläche F^2 das Strahlennetz hindurchgelegt, d. i. drei von den bestimmenden Geraden des Netzes lege ich in die Regelschaar Γ, die vierte ist der beliebige Complexstrahl h. Weil dieses Strahlennetz die Regelschaar Γ enthält, müssen seine beiden Leitgeraden u und v Geraden der verbundenen Regelschaar Λ sein. Durch den Berührungspunkt der Tangente h geht, wie durch jeden Punkt der F^2, eine Gerade g der Regelschaar Γ. Mithin hat unser Strahlennetz mit dem Tangentenbüschel dieses Berührungspunktes zwei Gerade gemein, nämlich g und h, es enthält ihn also ganz. Die eine Leitgerade u des Strahlennetzes muss durch den Scheitel dieses Tangentenbüschels gehen, die andere Leitgerade v muss in der Ebene des Büschels liegen. Da aber die Leitgeraden u und v des Strahlennetzes, wie bereits gesagt, Geraden der Regelschaar Λ sind, da durch den Scheitel des Tangentenbüschels nur eine einzige Gerade der Regelschaar Λ geht und in der Ebene des Büschels die einzige Gerade der Regelschaar Λ diejenige ist, welche durch den Berührungspunkt geht, so erkennen wir, dass die beiden Leitgeraden des Strahlennetzes in die Gerade der Regelschaar Λ zusammenfallen, welche durch den Berührungspunkt der beliebigen Tangente h hindurchgeht.

Genau dasselbe gilt für die Strahlennetze, welche durch die Regelschaar Λ von Doppelstrahlen und eine Gerade h des Tangentencomplexes hindurchgelegt werden.

Jedes durch die Regelschaar Γ bezw. Λ und eine beliebige Gerade h des Tangentencomplexes hindurchgelegte Strahlennetz ist ein ausgezeichnetes Strahlennetz, ein parabolisches Strahlennetz, wie man ein solches neuerdings nennt, dessen beide Leitgeraden in die Gerade der Regelschaar Λ bezw. Γ zusammenfallen, die durch den Berührungspunkt der Tangente h geht.

Denke ich mir eine beliebige Gerade x eines solchen Strahlennetzes, so lehren mich die beiden in eine bestimmte Gerade der Regelschaar Λ bezw. Γ zusammengefallenen Leitgeraden, dass diese Gerade x mit der F^2 zwei vereinigte Schnitte hat, also eine Tangente der F^2 ist. Wir erkennen somit, dass jede Gerade eines derartigen Strahlennetzes Tangente der Grundfläche ist, dass jedes derartige Strahlennetz vollständig dem Tangentencomplex der F^2 angehört.

Entsprechend den ∞^3 Geraden des Tangentencomplexes kann ich dem vierten bestimmenden Strahl h eines solchen Strahlennetzes ∞^3 Lagen geben, während die drei ersten bestimmenden Geraden der Regelschaar Γ oder Λ angehören. Habe ich aber ein solches Strahlennetz bestimmt, dann kann ich jeden seiner ∞^2 Strahlen als vierten bestimmenden Strahl ansehen. Mithin ergiebt sich als Mannigfaltigkeit der Strahlennetze des Tangentencomplexes, die durch die Regelschaar Γ bezw. Λ gehen, ∞^1.

Durch jeden Complexstrahl h ist, wie sich aus dem obigen ergiebt, eindeutig ein Strahlennetz bestimmt, welches durch die Regelschaar Γ bezw. Λ geht und dem Tangentencomplex angehört. Also erhalten wir das Ergebnis:

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades besitzt zwei Systeme von ∞^1 parabolischen Strahlennetzen, die den Complex einfach durchziehen. Die Strahlennetze des einen Systems gehen durch die Regelschaar Γ und haben immer in einer Geraden der Regelschaar Λ die beiden zusammengefallenen Leitgeraden. Die Strahlennetze des zweiten Systems gehen durch die Regelschaar Λ und haben immer in

einer Geraden der Regelschaar Γ *die beiden zusammengefallenen Leitgeraden.*

Dieser Satz subsumiert sich dem des allgemeinen Falls, dass jeder Complex 2. Grades mit einer Regelschaar Δ von Doppelstrahlen ein ∞^1— System von Strahlennetzen besitzt, die den Complex einfach durchziehen und durch die Regelschaar Δ gehen (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 829).

13. Zu diesen beiden Systemen von ∞^1 ausgezeichneten Strahlennetzen des Tangentencomplexes können wir noch in anderer Weise gelangen. Denkt man sich nämlich eine Gerade g der Regelschaar Γ, so hat jeder ihrer Punkte einen Tangentenbüschel mit je ∞^1 Tangenten. Wir bekommen somit eine zweifache Mannigfaltigkeit von Geraden des Complexes, welche die Fläche F^2 längs der Geraden g berühren, also eine Congruenz. Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes geht eine Berührungsebene der F^2 durch g, aus derem Tangentenbüschel die einzige Gerade dieser Congruenz nach P geht. Eine beliebige Ebene π des Raumes schneidet die Gerade g in einem Punkte, dessen Tangentenbüschel in die Ebene π den einzigen Strahl dieser Congruenz einschneidet. Also ist diese Congruenz erster Ordnung und erster Klasse, also ein Strahlennetz, und zwar ein ausgezeichnetes Strahlennetz, dessen beide Leitgeraden sich in g vereinigt haben. Denn die Art und Weise, wie wir zu diesem Strahlennetze gekommen sind, deckt sich vollständig mit der in Sturm's Liniengeometrie Bd. I 58 auseinandergesetzten Herstellungsweise eines Strahlennetzes mit zwei vereinigten Leitgeraden. Zwischen den Punkten der Geraden g und den zugehörigen Berührungsebenen besteht ja eine Projektivität, und die Strahlenbüschel, deren Scheitel und Ebenen entsprechende Elemente dieser projektiven Beziehung sind, erzeugen das ausgezeichnete Strahlennetz mit g als einziger Leitgeraden. Dieses Strahlennetz geht ersichtlich durch die verbundene Regelschaar Λ; denn jeder der ∞^1 Tangentenbüschel enthält eine Gerade der Regelschaar Λ.

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass die Gesamtheit aller Complexstrahlen, welche längs einer Geraden l der Regelschaar Λ die Fläche F^2 berühren, ein Strahlennetz mit dieser Geraden l als ausgezeichneter Leitgeraden bildet, das durch die verbundene Regelschaar Γ hindurchgeht.

Wiederholen wir diese Überlegungen bei allen Geraden g der Regelschaar Γ und allen Geraden l der Regelschaar Λ, so erkennen wir, *dass wir in den Strahlennetzen von Complexstrahlen, welche die F^2 längs einer Geraden g oder längs einer Geraden l berühren, die vorhinnigen beiden Systeme von ∞^1 Strahlennetzen des Tangentencomplexes erhalten haben.*

Die „linear berührenden" Regelschaaren des Tangentencomplexes.

14. Nun stelle ich mir ein solches ausgezeichnetes Strahlennetz des Tangentencomplexes vor, gebildet von allen Tangenten der Grundfläche, die sie längs einer ihrer Geraden g oder l berühren. Die ∞^2 Geraden dieses Netzes [g] oder [l] kann ich auf ∞^6 Weisen zu je drei zusammenstellen. Jede der auf diese Weise entstehenden Regelschaaren hat mit dem betreffenden Netze [g] oder [l] drei Strahlen gemein, gehört ihm also ganz an. Jede Gerade jeder dieser Regelschaaren ist daher auch Tangente der F^2 längs g bezw. l. Diese Regelschaaren berühren die F^2 längs der Geraden g bezw l. Ist aber eine von diesen Regelschaaren bestimmt, dann kann ich ja drei ihrer ∞^1 Geraden als die constituierenden ansehen. Also vermindert sich die Mannigfaltigkeit dieser Regelschaaren, welche die F^2 längs einer Geraden g oder l berühren, von ∞^6 auf ∞^3. Wir gewinnen somit folgendes Resultat:

Längs derselben Geraden g oder l der Grundfläche F^2 *berühren* ∞^3 *Regelschaaren, welche dem Tangentencomplex vollständig angehören.* Diese Tatsache gilt für jede Gerade

g bezw. l der beiden Regelschaaren Γ und Λ. Mithin können wir fortfahren:

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades besitzt zwei Systeme von je ∞^4 „linear tangirenden" Regelschaaren, je nachdem die Gerade, längs deren die Berührung stattfindet, der einen oder andern Regelschaar der Fläche angehört.

Im folgenden beschäftigen wir uns weiter mit der eben gewonnenen Tatsache, dass längs derselben Geraden von F^2 ∞^3 Regelschaaren berühren. Dabei wollen wir nur an eine Gerade g der Regelschaar Γ denken; für die Geraden der Regelschaar Λ gilt dasselbe, nur mit vertauschter Bezeichnung. Da die Regelschaaren, welche längs einer Geraden g berühren, sämtlich dem ausgezeichneten Strahlennetze von Complexstrahlen angehören, dessen beide Leitgeraden sich in der betreffenden Geraden g vereinigt haben, so haben je zwei von diesen ∞^3 Regelschaaren stets zwei Gerade gemein. Denn zwei Regelschaaren, die demselben Strahlennetze angehören, haben stets zwei Gerade gemein.

Berücksichtigen wir ferner, dass das Strahlennetz, welchem jede dieser Regelschaaren angehört, durch die Regelschaar Λ gehen muss, so sehen wir, dass jede dieser ∞^3 Regelschaaren sich auch mit der Regelschaar Λ in demselben Netze befindet, dass mithin auch diese beiden Regelschaaren zwei Gerade gemein haben.

Es gilt somit der Satz:

Je zwei von den ∞^3 Regelschaaren, welche die F^2 längs einer Geraden g bezw. l berühren, haben stets zwei Gerade gemein, und jede dieser Regelschaaren enthält auch zwei Gerade aus der andern Schaar Λ bezw. Γ der Grundfläche.

Es sei ferner t eine beliebige Tangente der F^2. Ist es möglich, dass durch diese Tangente linear berührende Regelschaaren des Tangentencomplexes gehen, und wie viele tun es? Wenn die Tangente t einer solchen Regelschaar angehören soll, dann kann die Gerade, längs deren die Berührung stattfindet, sowohl die Gerade g der Regelschaar Γ als die Gerade l der Regelschaar Λ sein, die sich in dem

Berührungspunkt der Tangente t schneiden. Halte ich nun die Tangente t fest und stelle ich die ∞^2 Strahlen des Strahlennetzes [g] oder [l] auf alle ∞^4 Weisen zu je zwei zusammen, so erhalte ich je ∞^4 Regelschaaren, welche bezw. den Strahlennetzen [g] oder [l] angehören, also längs g bezw. l die F^2 berühren und durch die beliebige Tangente t gehen. Da ich aber jede zwei der ∞^1 Geraden einer so gewonnenen Regelschaar als die beiden weitern bestimmenden Strahlen neben der Tangente t ansehen darf, so vermindert sich die Mannigfaltigkeit dieser Regelschaaren auf ∞^2. Wir bekommen somit als Ergebnis:

Durch eine beliebige Tangente der Fläche gehen ∞^2 linear berührende Regelschaaren des Tangentencomplexes. Die Gerade, längs deren die Berührung statt hat, kann sowohl die Gerade der Regelschaar V als die Gerade der Regelschaar A sein, die sich in dem Berührungspunkte der beliebigen Tangente schneiden.

Es ist also für die ∞^4 linear berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes der F^2 eine zweifache Bedingung, durch eine beliebige Tangente der F^2 zu gehen.

Sind mir ferner zwei Tangenten t und t_1 der F^2 gegeben, und zwar in der speziellen Lage, dass ihre Berührungspunkte auf derselben Geraden der Fläche, etwa einer Geraden g, liegen, dann gilt hinsichtlich der linear berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes, welche durch die beiden gegebenen Tangenten gehen, folgendes:

Jede derartige Regelschaar kann ersichtlich die Fläche F^2 nur längs der Geraden g berühren, welche die beiden Berührungspunkte von t und t_1 verbindet. Daher gewinne ich diese Regelschaaren, wenn ich die beiden Tangenten t und t_1 festhalte und der dritten bestimmenden Geraden alle ∞^2 Lagen im Strahlennetze [g] gebe. Jede dieser Regelschaaren kann aber ∞^1-mal in dieser Weise erhalten werden, da ich jede ihrer ∞^1 Geraden als die dritte bestimmende Gerade ansehen kann. Also bekomme ich nur ∞^1 linear berührende Regelschaaren, welche durch t und t_1 hindurchgehen.

Durch zwei Tangenten der Fläche F^2 in der speziellen Lage, dass ihre Berührungspunkte auf derselben Geraden der Fläche F^2 liegen, gehen ∞^1 linear berührende Regelschaaren des Tangentencomplexes. Die Gerade, längs deren die Berührung stattfindet, ist die Gerade der Grundfläche, auf welcher die Berührungspunkte der beiden gegebenen Tangenten liegen.

Sind drei Tangenten der F^2 in der speziellen Lage gegeben, dass ihre Berührungspunkte auf einer Geraden der F^2 liegen, dann gibt es ersichtlich nur eine Regelschaar des Tangentencomplexes, welche durch die drei Tangenten geht und die F^2 längs einer Geraden berührt, nämlich längs der Geraden, auf welcher die drei Berührungspunkte liegen.

Haben aber zwei Tangenten der F^2 ganz beliebige Lage, dann müsste die Gerade, längs deren eine etwaige Regelschaar des Complexes durch die beiden Tangenten die F^2 berührte, die Berührunpspunkte der beiden Tangenten verbinden. Andere Geraden aber als die Geraden der Regelschaaren Γ und Λ sind auf der F^2 nicht vorhanden, und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte ist weder eine Gerade g noch eine Gerade l, sondern eine ganz beliebige Secante der F^2.

Durch zwei beliebige Tangenten der F^2 geht also keine die Fläche linear berührende Regelschaar des Tangentencomplexes.

Die „conisch berührenden" Regelschaaren des Tangentencomplexes.

15. Die gegebene Fläche 2. Grades werde jetzt mit einer beliebigen Ebene $\varkappa$ in dem Kegelschnitt k^2 geschnitten. Jeder von den ∞^1 Punkten dieses Kegelschnitts ist Scheitel eines Tangentenbüschels, in welchem sich auch die beiden Geraden g und l der F^2, die sich in diesem Punkte schneiden, befinden. Ferner gehört auch jedem dieser Büschel die Tangente t an den Kegelschnitt k^2 und die Tangente nach

dem Scheitel O des Tangentialkegels an, welcher k^2 zur Berührungscurve hat.

Durch die drei Geraden g, l, t in jedem dieser ∞^1 Tangentenbüschel ist eine Projektivität zwischen den Tangenten dieser Büschel festgelegt. In dieser Projektivität entsprechen einander die Berührungskanten x des Tangentialkegels (O). Denn die Ebene x des Berührungskegelschnitts ist die Polarebene der Spitze des Kegels und schneidet daher in jede durch die Spitze gehende Tangentialebene gl die Polare des Punktes O bezüglich des ausgeschnittenen Geradenpaars gl ein. Also sind g, l, t, x vier harmonische Strahlen, das Doppelverhältnis (g l t x) in jedem der Tangentenbüschel ist gleich —1, in jedem der Tangentenbüschel längs k^2 sind die Tangenten nach der Spitze O entsprechende Geraden in der gewonnenen Projektivität.

Greift man nun aus einem der ∞^1 Tangentenbüschel eine beliebige Tangente x heraus, welche nicht durch O geht, so entsprechen ihr in der Projektivität der Tangentenbüschel längs k^2 ∞^1 andere Tangenten $x_1, x_2, \ldots$, welche ebenfalls nicht durch O gehen, da sonst das Doppelverhältnis $(g\,l\,t\,x_\nu)$, welches dieser Reihe von entsprechenden Tangenten zugehört, gleich —1 wäre und daher auch die gewählte Tangente x durch O ginge. Wir erhalten so ein ∞^1-System von Geraden $x, x_1, x_2, \ldots$, denen ein bestimmtes Doppelverhältnis zugehört, welche die F^2 sämtlich längs k^2 berühren, von denen zwei aufeinanderfolgende im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, die also eine windschiefe Regelfläche bilden.

Wir wollen beweisen, dass diese Regelfläche zweiten Grades, also eine Regelschaar ist. Längs des Kegelschnitts k^2 ist der F^2 eine Büschel-Schaar von Flächen 2. Grades umgeschrieben; zu ihr gehören die gegebene Fläche, der Kegelschnitt k^2 und der Berührungskegel. Unterscheidet man bei jeder Fläche dieser Büschel-Schaar die beiden Regelschaaren, so haben wir jede der Flächen zweimal zu rechnen, ausgenommen den Kegelschnitt k^2 und den Berührungskegel. Diese Regelschaaren bewirken zwischen irgend zwei Tan-

gentenbüscheln in Punkten von k^2 eine Projektivität. Denn sei x ein Strahl des einen Büschels, so ist durch ihn eine jener Flächen und auf ihr die eine Regelschaar eindeutig bestimmt; und sofort ist auch diejenige Gerade x_1 dieser Regelschaar bestimmt, die zum andern Büschel gehört. Ebenso ergibt sich x eindeutig aus x_1. Kommt x nach t, g, l, so kommt x_1 ersichtlich nach t_1, g_1, l_1. Mithin bedingt jede Regelschaar einer Fläche der Büschel-Schaar ein bestimmtes Doppelverhältnis

$$(g\,l\,t\,x) = (g_1\,l_1\,t_1\,x_1) = (g_2\,l_2\,t_2\,x_2) \text{ u. s. w.}$$

Dieses Doppelverhältnis ist aber dasselbe, welches zu dem oben erhaltenen ∞^1-System von Tangenten längs k^2 gehört; die durch die Regelschaaren der Flächen der Büschel-Schaar festgelegte Projektivität in den Tangentenbüscheln längs k^2 ist mit der Ausgangsprojektivität identisch. Mithin bildet das obige System von entsprechenden Tangenten in Wirklichkeit eine Regelschaar.

Demnach haben wir das Resultat gewonnen, dass jede Reihe von entsprechenden Tangenten obiger Projektivität eine Regelschaar liefert, welche die F^2 längs des Kegelschnitts k^2 berührt. Da wir aber ∞^1 solcher Reihen von entsprechenden Tangenten haben, so erhalten wir ∞^1 solcher Regelschaaren, welche die F^2 längs des Kegelschnitts k^2 berühren. Alle diese Regelschaaren gehören vollständig dem Tangentencomplex der F^2 an; denn ihre Erzeugenden sind Tangenten der F^2. Wir bezeichnen sie als die Regelschaaren ρ des Tangentencomplexes. Unter diesen Regelschaaren befinden sich als ausgezeichnete die Regelschaaren Γ und Λ der Grundfläche, das Continuum der Tangenten des Kegelschnitts k^2 und das Continuum der Kanten des Berührungskegels (0); die Erzeugenden dieser Regelschaaren sind ebenfalls entsprechende Tangenten in der obigen Projektivität.

Denke ich mir ferner zu sämtlichen ∞^1 Regelschaaren ρ, welche längs k^2 berühren, die verbundenen Regelschaaren r konstruiert, wobei die Bezeichnung r eine andere Bedeutung hat als in Sturm's Liniengeometrie Bd. III 838, so gehören diese auch zu dem Tangentencomplex und berühren die F^2

ebenfalls längs des Kegelschnitts k^2. Denn die gemeinsame Trägerfläche zweier Regelschaaren ϱ und $\mathfrak{r}$ berührt die gegebene F^2 längs k^2. Also müssen es auch die Geraden der Leitschaar $\mathfrak{r}$ tun.

Fassen wir alles bisher Gesagte zusammen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Längs des Schnittkegelschnitts k^2 einer beliebigen Ebene $\varkappa$ berühren ∞^1 Regelschaaren ϱ des Tangentencomplexes die Fläche F^2 und machen die Tangentenbüschel der F^2 in den verschiedenen Punkten von k^2 projektiv mit zur nämlichen Regelschaar ϱ gehörigen Strahlen als entsprechenden. Die verbundenen Regelschaaren dieser ∞^1 Regelschaaren ϱ gehören ebenfalls zum Tangentencomplex und berühren auch die F^2 längs des Kegelschnitts k^2.

Ist nun (X, ξ) ein beliebiger von den ∞^1 Tangentenbüscheln in den Punkten des Kegelschnitts k^2, sind g, l wiederum die beiden Geraden der F^2 im Punkte X, t die Tangente in X an k^2 und x die Gerade einer bestimmten, längs k^2 berührenden Regelschaar ϱ in diesem Büschel, dann hat nach den obigen Auseinandersetzungen das Doppelverhältnis (g l t x) dieser vier Strahlen für alle Tangentenbüschel in den verschiedenen Punkten von k^2 denselben Wert und ist somit der bestimmten Regelschaar ϱ eindeutig zugeordnet.

Infolge der Entstehungsweise der Regelschaaren ϱ durch die Projektivität in den ∞^1 Tangentenbüscheln der Punkte auf k^2 ist jeder Regelschaar ϱ demnach ein ganz bestimmtes Doppelverhältnis (g l t x) zugeordnet, das für alle Punkte von k^2 konstant bleibt.

Alle Geraden der zu ϱ verbundenen Regelschaar $\mathfrak{r}$ berühren auch, wie wir erkannten, die F^2 längs des Kegelschnitts k^2. Also haben wir in dem Tangentenbüschel (X, ξ), mit dem wir uns eben beschäftigten, auch eine Gerade y der verbundenen Regelschaar $\mathfrak{r}$. Somit haben wir es in dem Tangentenbüschel (X, ξ) mit den fünf Geraden g, l, t, x, y zu tun.

Lasse ich nun in dem Tangentenbüschel (X, ξ) solche Tangenten einander entsprechen, die zu zwei verbundenen Regelschaaren ϱ

und r gehören, so erhalte ich in ihm eine Involution. Offenbar sind g, l und x, y zwei Paare entsprechender Strahlen in dieser Beziehung; denn auch die beiden Regelschaaren Γ und Λ sind als zwei verbundene Regelschaaren, welche längs k^2 berühren, aufzufassen; die beiden Geraden x, y gehören nach Annahme zu zwei verbundenen Regelschaaren ρ und r.

Diese Beziehung ist wirklich involutorisch. Denn gleichviel ob ich die Tangente x dem ersten oder zweiten Strahlenbüschel (X, ξ) zurechne, ihre in der festgesetzten Beziehung entsprechende Tangente ist die zu der verbundenen Regelschaar r gehörige Tangente, also y.

Zu den Regelschaaren ρ, welche längs k^2 berühren, gehört, wie wir wissen, das Continuum der Tangenten von k^2.

Da ferner diese Regelschaar zu sich selbst verbunden ist, so folgt, dass die Tangente t an k^2 in dem Büschel (X, ξ) sich selbst in der vorliegenden Involution entspricht, ein Doppelelement derselben ist. Das andere Doppelelement ist die Tangente aus X nach dem Scheitel des Tangentialkegels (0), welcher k^2 zur Berührungscurve hat.

Bilden wir daher für den von der verbundenen Regelschaar r in dem Büschel (X, ξ) herrührenden Strahl y das Doppelverhältnis (g l t y), so ist, behaupte ich, dieses zu dem Doppelverhältnis (g l t x) reciprok. Da nämlich g, l; x, y; t, t drei Paare obiger Strahleninvolution sind, so besteht (Steiner-Schröter 47) folgende Relation:

$$(g\,l\,t\,y) = (l\,g\,t\,x) = \frac{1}{(g\,l\,t\,x)}.$$

Wir haben somit als Ergebnis festzuhalten:

Der verbundenen Regelschaar r *jeder längs des Kegelschnitts* k^2 *berührenden Regelschaar* ρ *kommt das reciproke Doppelverhältnis zu.*

Erwägen wir ferner, dass es im Raume ∞^3 Ebenen gibt und also ebensoviele ebene Schnitte k^2 mit der Fläche F^2 möglich sind, längs deren je ∞^1 Regelschaaren ρ des Tangentencomplexes berühren, so erkennen wir, dass wir ausser den

beiden in Nr. 14 besprochenen Systemen von je ∞^4 Regelschaaren im Tangentencomplex, welche die F^2 linear berühren, noch ein drittes System von conisch berührenden Regelschaaren erhalten.

Der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades besitzt noch ein drittes System von ∞^4 „conisch, d. i. längs eines Kegelschnitts, berührenden" Regelschaaren.

16. Es sei x eine beliebige Tangente der Fläche 2. Grades und P ihr Berührungspunkt. Entsprechend den ∞^2 Ebenen des Bündels P erhalte ich ∞^2 Schnittkegelschnitte, die sämtlich durch den Punkt P gehen. k^2 sei ein bestimmter von diesen Kegelschnitten und $\varkappa$ seine Ebene.

Zwischen dem Tangentenbüschel des Punktes P und allen ∞^1 Tangentenbüscheln der verschiedenen Punkte von k^2 besteht eine Projektivität, wie in Nr. 15 erkannt wurde, festgelegt durch die beiden Geraden g und l der F^2 und die Tangente t an k^2 in jedem der Tangentenbüschel längs k^2. Jede Reihe von entsprechenden Tangenten in dieser Projektivität liefert eine Regelschaar des Tangentencomplexes, welche längs k^2 berührt. Also bestimmen auch die gegebene Tangente x und die Reihe ihrer in der Projektivität entsprechenden Tangenten eine solche Regelschaar, die also längs k^2 die F^2 berührt und durch die gegebene Tangente x geht.

Dieser Vorgang wiederholt sich bei allen ∞^2 Schnittkegelschnitten, die durch P gehen. Mithin gilt folgender Satz:

Im Tangentencomplex der Fläche 2. Grades gibt es ∞^2 Regelschaaren, welche die F^2 conisch berühren und durch eine gegebene Tangente gehen.

Es seien ferner zwei beliebige Tangenten x und x_1 gegeben, ihre Berührungspunkte seien bezw. P und P_1. Zwischen den beiden Tangentenbüscheln dieser Punkte P und P_1 legen die drei Tangentenpaare gg_1, ll_1, xx_1 die Projektivität $glx\,\overline{\wedge}\,g_1l_1x_1$ fest. Diese Projektivität führt mich aber zu einer Involution in dem Ebenenbüschel der Verbindungsgeraden PP_1 v. In dieser Involution sind solche Ebenen einander gepaart, in denen entsprechende Tangenten der obigen Pro-

jektivität liegen. Bestimmt ist diese Involution durch die beiden Ebenenpaare $(vg, vg_1) \equiv (vl_1, vl)$ und (vx, vx_1).

Die beiden Doppelebenen dieser Involution bezeichne ich mit $\varkappa$ und $\varkappa'$. Es sind Ebenen, welche mit ihrer gepaarten zusammenfallen, die also je zwei entsprechende Gerade in der Projektivität der beiden Tangentenbüschel P und P_1 enthalten. Für die eine dieser beiden Doppelebenen $\varkappa$ seien die beiden entsprechenden Tangenten in den beiden Büscheln t und t_1. Für die Schnittcurve k^2 dieser Ebene $\varkappa$ mit der F^2 sind ersichtlich die beiden Geraden t und t_1 die Tangenten in den Punkten P und P_1.

Denkt man sich daher die sämtlichen Tangentenbüschel in den ∞^1 Punkten dieses Kegelschnitts k^2, so legen die drei Geraden g, l, t in den ∞^1 Tangentenbüscheln von k^2 eine Projektivität fest, die durch ihre ∞^1 Reihen entsprechender Tangenten bekanntlich zu den ∞^1 Regelschaaren ρ führt, welche längs k^2 die F^2 berühren. Da nun die beiden Geraden t und t_1 der beiden Tangentenbüschel P bezw. P_1 in der ersten Projektivität $g\ l\ x \overline{\wedge} g_1\ l_1\ x_1$ entsprechende Gerade sind, so erkennen wir, dass die neue Projektivität $g\ l\ t \overline{\wedge} g_1\ l_1\ t_1$ mit der ersten drei Paare entsprechender Geraden gemein hat, dass mithin diese beiden Projektivitäten identisch sind.

Folglich sind auch x und x_1 in der neuen Projektivität, welche die längs k^2 berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes liefert, entsprechende Tangenten, d. i. es geht durch x und x_1 eine Regelschaar, welche längs des Kegelschnitts k^2 berührt.

Da man dieselben Erwägungen auch für die zweite Doppelebene $\varkappa'$ machen kann, wobei sich ebenfalls herausstellt, dass es eine Regelschaar gibt, welche durch x und x_1 geht und die F^2 längs des Schnittes $k^{2'}$ von $\varkappa'$ berührt, so erkennen wir, dass es unter den conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes zwei gibt, welche durch die beiden gegebenen Tangenten x und x_1 hindurchgehen.

Die beiden Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ waren die Doppelebenen der Ebeneninvolution um die Verbindungslinie PP_1. Die Ebenen vg und vg_1, welche ja mit den beiden von v an die F^2

kommenden Berührungsebenen identisch sind, sind ein Paar dieser Involution. In jeder gemeinen Involution sind aber zwei gepaarte Elemente den beiden Doppelelementen harmonisch zugeordnet. Wenden wir dies auf unsern Fall an, so heisst das, die Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ der Berührungskegelschnitte der beiden durch x und x_1 gehenden conisch berührenden Regelschaaren sind den beiden durch ihre Schnittlinie v gehenden Berührungsebenen der F^2 harmonisch zugeordnet. Zwei solche Ebenen aber sind in Bezug auf die F^2 conjugiert.

Demnach haben wir folgendes Resultat:

In dem Tangentencomplex der Fläche 2. Grades gibt es zwei Regelschaaren, welche durch zwei beliebige Tangenten x, x_1 gehen und die F^2 längs eines Kegelschnitts, also conisch, berühren. Die Ebenen $\varkappa, \varkappa'$ ihrer Berührungskegelschnitte sind in Bezug auf die F^2 conjugiert.

16a. Ich nehme jetzt umgekehrt zwei Kegelschnitte k^2 und $k^{2'}$ auf der Grundfläche an, deren Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ in Bezug auf sie conjugiert sind. Die Schnittlinie der beiden Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ heisse v, die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte P und P_1.

Die beiden Geraden der F^2 in P und P_1 und die beiden Tangenten sowohl in P als in P_1 an die beiden Kegelschnitte k^2 und $k^{2'}$ bestimmen zwischen den beiden Tangentenbüscheln der F^2 in P und P_1 zwei Projektivitäten:

$$\mathrm{glt}\ \overline{\wedge}\ g_1 l_1 t_1 \text{ und } \mathrm{glt}'\ \overline{\wedge}\ g_1 l_1 t_1'.$$

Die erste Projektivität führt mich zu den ∞^1 Regelschaaren ρ, welche die F^2 längs k^2 berühren, die zweite zu den ∞^1 Regelschaaren ρ, welche die F^2 längs $k^{2'}$ berühren. Wähle ich in dem Tangentenbüschel des P eine Tangente x, so entspricht ihr vermöge der ersten Projektivität im Tangentenbüschel P_1 eine Tangente x_1, die mit ihr zu einer Regelschaar ρ gehört, welche die F^2 längs k^2 berührt, vermöge der zweiten Projektivität eine Tangente x_1', die mit ihr zu einer Regelschaar ρ gehört, welche die F^2 längs $k^{2'}$ berührt.

Wir haben somit zwei Regelschaaren ρ vor uns, welche die F^2 in Kegelschnitten berühren, deren Ebenen in Bezug auf die F^2 conjugiert sind und welche an dem einen Schnittpunkt P der beiden Kegelschnitte eine Erzeugende x gemein haben. Ich behaupte nun, dass die beiden Regelschaaren auch an dem andern Schnittpunkt P_1 eine Erzeugende gemein haben, d. i. dass die beiden der Tangente x in den beiden Projektivitäten entsprechenden Tangenten x_1 und x_1' im Büschel P_1 zusammenfallen.

Zum Beweise dieser Behauptung dient die Voraussetzung, dass die Ebenen $\varkappa, \varkappa'$ der beiden Kegelschnitte in Bezug auf die F^2 conjugiert sind, d. i. diese beiden Ebenen sind den beiden Berührungsebenen der F^2 durch ihre Schnittlinie v harmonisch zugeordnet. Folglich kann ich die beiden Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa'$ als Doppelebenen einer Ebeneninvolution um die Schnittlinie v ansehen, in welcher die beiden Berührungsebenen durch v an die F^2, also die beiden Ebenen $vg \equiv vl_1$ und $vl \equiv vg_1$, gepaart sind; dabei sind g,l bezw. g_1, l_1 die beiden Geraden der F^2 im Punkte P bezw. P_1.

Diese Involution in dem Ebenenbüschel der Verbindungslinie PP_1 ruft zwischen den beiden Tangentenbüscheln P und P_1 eine dritte Projektivität

$$gltt' \;\overline{\wedge}\; g_1 l_1 t_1 t_1'$$

hervor, in welcher solche Gerade einander entsprechen, die von gepaarten Ebenen der Involution eingeschnitten werden. Dabei verstehe ich unter t, t_1 die beiden Schnitte der Ebene $\varkappa$ mit den Ebenen der beiden Büschel P und P_1, unter t', t_1' die der Ebene $\varkappa'$ mit diesen Ebenen.

Jede der beiden ersten Projektivitäten hat mit dieser dritten Projektivität drei Paare entsprechender Strahlen gemein. Folglich sind beide mit der dritten und also auch miteinander identisch.

Wenn aber die beiden Projektivitäten

$$glt \;\overline{\wedge}\; g_1 l_1 t_1 \text{ und } glt' \;\overline{\wedge}\; g_1 l_1 t_1'$$

identisch sind, dann entspricht dem Strahle x des Büschels P derselbe Strahl des Büschels P_1; es ist x_1 mit x_1' identisch. Die beiden Regelschaaren ρ, von denen die eine

längs k^2, die andere längs $k^{2'}$ berührt, haben also ausser der gemeinsamen Erzeugenden x im Punkte P auch noch eine Erzeugende im zweiten Schnittpunkt P_1 gemein.

Wir erhalten somit folgende Umkehrung zu dem letzten Satze:

Wenn längs zweier Kegelschnitte, deren Ebenen inbezug auf F^2 conjugiert sind, zwei Regelschaaren des Tangentencomplexes berühren, die an dem einen Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte eine gemeinsame Erzeugende haben, so haben sie auch an dem andern Schnittpunkt eine gemeinsame Erzeugende.

Zwei Regelschaaren, die zwei Erzeugende gemein haben, werden in der Liniengeometrie sich tragende oder stützende Regelschaaren genannt. Wir wollen jetzt von zwei sich tragenden Regelschaaren des Tangentencomplexes, die also zwei Tangenten x und x_1 gemein haben, beweisen, dass ihnen entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse zukommen.

Halten wir die bisherigen Bezeichnungen bei, so kommt der einen von zwei sich tragenden Regelschaaren das Doppelverhältnis (glt x), der andern das Doppelverhältnis (glt' x) zu. Wir denken uns hierbei diese Tangenten sämtlich in demselben Tangentenbüschel P. Da die Ebenen $\varkappa$, $\varkappa'$ der Berührungskegelschnitte dieser Regelschaaren den beiden Berührungsebenen der F^2 durch ihre Schnittlinie v harmonisch zugeordnet sind, so schneiden diese vier Ebenen in den Tangentenbüschel P vier harmonische Strahlen ein, d. i. es ist das Doppelverhältnis $(glt\,t') = -1$ oder

es ist $$(+)\quad \frac{\sin(gt)}{\sin(lt)} = -\frac{\sin(gt')}{\sin(lt')}.$$

Bilden wir jetzt die beiden Doppelverhältnisse (glt x) und (glt' x),

$$\frac{\sin(gt)\,.\,\sin(lx)}{\sin(lt)\,.\,\sin(gx)} \text{ und } \frac{\sin(gt')\,.\,\sin(lx)}{\sin(lt')\,.\,\sin(gx)},$$

so erkennen wir, unter Berücksichtigung der Relation (+), dass die beiden Doppelverhältnisse in der Tat entgegengesetzt gleich sind.

Wir können somit als Satz festhalten:

Zwei sich tragenden conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes der F^2 kommen entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse zu.

Die Gebüsche Σ_3 von „conisch berührenden" Regelschaaren im Tangentencomplex.

17. Zwei conisch berührende Regelschaaren des Tangentencomplexes in allgemeiner Lage zu einander haben keine gemeinsame Gerade. Denn eine solche kann als Gerade des Tangentencomplexes höchstens drei Bedingungen erfüllen, nicht vier, wie sie tun müsste, wenn sie den beiden Regelschaaren angehörte. Haben die beiden Regelschaaren aber zwei Gerade gemein, sind sie also zwei sich tragende conisch berührende Regelschaaren des Tangentencomplexes, dann befinden sie sich ersichtlich in demselben Strahlennetze. Die beiden gemeinsamen Geraden und noch je eine Gerade aus jeder der beiden Regelschaaren sind die vier bestimmenden Geraden dieses Strahlennetzes, das mit jeder der beiden Regelschaaren drei Erzeugende gemein hat, sie also ganz enthält.

Es soll nun die umgekehrte Frage entschieden werden, ob jedes der ∞^2 Strahlennetze durch eine bestimmte conisch berührende Regelschaar ρ_0 aus dem Tangentencomplexe wiederum eine conisch berührende Regelschaar ausschneidet. Dass ein solches Strahlennetz aus dem Tangentencomplex ausser der Regelschaar ρ_0 überhaupt eine Regelschaar ausschneidet, ist sicher; denn beide Regelschaaren ρ_0 und die zweite, ich nenne sie vorwegnehmend ρ_1, machen den vollen Schnitt des Strahlennetzes mit dem Tangentencomplexe, eine Regelfläche 4. Grades, aus. Beide Regelschaaren ρ_0 und ρ_1 haben aber zwei Erzeugende gemein, weil sie sich in demselben Strahlennetze befinden. Zwei Erzeugende der Regelschaar ρ_1 berühren also die F^2 in zwei Punkten, die sicher nicht auf einer und derselben Geraden der F^2 liegen. Es

sind ja die Berührungspunkte dieser beiden Erzeugenden, weil sie ja auch Erzeugende der Regelschaar ρ_0 sind, zwei verschiedene Punkte auf dem Berührungskegelschnitt der Regelschaar ρ_0. Mithin kann die Regelschaar ρ_1 keine linear berührende Regelschaar des Tangentencomplexes sein; denn in diesem Falle müssten ja alle Geraden von ρ_1 längs einer Geraden g oder l die F^2 berühren. Es kann somit die Regelschaar ρ_1 nur eine conisch berührende sein, da ja andere als linear und conisch berührende Regelschaaren im Tangentencomplex nicht denkbar sind.

Es gilt somit der Satz:

Jedes durch eine conisch berührende Regelschaar des Tangentencomplexes gelegte Strahlennetz schneidet aus ihm eine zweite conisch berührende Regelschaar aus.

18. Jeder conisch berührenden Regelschaar des Tangentencomplexes ist, wie wir sahen, ein bestimmtes Doppelverhältnis q zugeordnet. Unter den ∞^4 conisch berührenden Regelschaaren gibt es solche mit gleichem Doppelverhältnis q; wir fragen uns, wie solche Regelschaaren beschaffen sind.

Es sei ρ_0 wieder eine ganz beliebige conisch berührende Regelschaar. Wählt man irgend zwei Erzeugende auf ihr, also Tangenten x, x_1 der F^2, dann wissen wir, dass durch diese beiden Tangenten ausser der Regelschaar ρ_0 noch eine zweite conisch berührende Regelschaar ρ_1 hindurchgehen muss und dass ρ_0 und ρ_1 entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse zukommen. Wählt man ferner zwei andere Erzeugende y, y_1 auf der Regelschaar ρ_1, so folgern wir desgleichen, dass durch y und y_1 ausser der Regelschaar ρ_1 noch eine zweite conisch berührende Regelschaar ρ_2 hindurchgeht und dass ρ_1 und ρ_2 entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse haben. Mithin kommen den beiden Regelschaaren ρ_0 und ρ_2 gleiche Doppelverhältnisse zu. Aus diesen Erörterungen ersehen wir, dass es erstens unter den ∞^4 conisch berührenden Regelschaaren eine unendlich grosse Menge von solchen mit gleichem Doppelverhältnis q giebt, dass zweitens alle conisch berührenden Regelschaaren, denen

das gleiche Doppelverhältnis mit einer gegebenen Regelschaar ρ_0 und also auch untereinander zugehört, mit dieser und also auch untereinander dreigliedrig verbunden sind (Sturm, Liniengeometrie Bd. III 608ff.).

Alle Regelschaaren eines Complexes 2. Grades aber, die mit einer gegebenen Regelschaar desselben dreigliedrig verbunden sind, bilden eine ausgezeichnete dreifache Mannigfaltigkeit von Regelschaaren des Complexes, ein sogenanntes Regelschaar-Gebüsche Σ_3.

Mithin erkennen wir zunächst, dass alle conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes, welchen mit einer gegebenen Regelschaar ρ_0 und also auch untereinander das gleiche Doppelverhältnis q zukommt, ein Regelschaar-Gebüsche Σ_3 bilden.

Wir fragen jetzt weiter, wie die conisch berührenden Regelschaaren beschaffen sind, denen das entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnis $-q$ zukommt. Dass diese Regelschaaren ebenfalls ein Gebüsche bilden, erhellt aus dem eben gewonnenen Ergebnis. Ich behaupte aber, dass sie das zu dem Gebüsche Σ_3 verknüpfte Regelschaar-Gebüsche Σ_3' bilden.

Das Regelschaar-Gebüsche Σ_3 der conisch berührenden Regelschaaren, denen das gleiche Doppelverhältnis q mit einer gegebenen Regelschaar ρ_0 zukommt, entsteht nach Analogie des allgemeinen Falls in folgender Weise:

Durch die Regelschaar ρ_0 legt man sämtliche ∞^2 Gewinde Γ hindurch und stellt sich die zugehörigen ∞^2 Schnittcongruenzen $\Gamma^2\Gamma$ vor. Die ∞^1 Strahlennetze durch ρ_0 in jedem dieser Gewinde Γ liefern in der betreffenden Schnittcongruenz $\Gamma^2\Gamma$ eine Reihe von Regelschaaren, und zwar von conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes, wie sich aus Nr. 17 ergibt. Diese Regelschaarreihe in der Schnittcongruenz $\Gamma^2\Gamma$ ist die verknüpfte zu derjenigen, in welcher sich ρ_0 befindet. Die Regelschaarreihe, in welcher sich ρ_0 befindet, erhält man, wenn man durch eine Regelschaar ρ_1 der verknüpften Reihe die ∞^1 Strahlennetze in demselben Gewinde Γ legt; die Regelschaaren dieser

Reihe sind nach dem in Nr. 17 gewonnenen Satze ebenfalls conisch berührende Regelschaaren des Tangentencomplexes. Die Regelschaarreihen in den ∞^2 Schnittcongruenzen $\Gamma^2\Gamma$, zu denen ρ_0 gehört, erzeugen das Regelschaar-Gebüsche Σ_3. Die verknüpften Regelschaarreihen aber geben mir das zu Σ_3 verknüpfte Gebüsche Σ_3'. Greift man irgend eine der verknüpften Regelschaarreihen heraus, so ist jede Regelschaar ρ_1 derselben mit ρ_0 in einem Strahlennetze gelegen, also mit ihr sich tragend. Folglich kommen den beiden Regelschaaren ρ_0 und ρ_1 entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse zu. Alle Regelschaaren jeder verknüpften Regelschaarreihe haben also entgegengesetzt gleiches Doppelverhältnis wie ρ_0, d. i. die Regelschaaren des verknüpften Gebüsches Σ_3' haben sämtlich mit ρ_0 entgegengesetzt gleiches Doppelverhältnis und stellen somit das Gebüsche der conisch berührenden Regelschaaren vor, welchen das Doppelverhältnis $-q$ zukommt.

Demnach haben wir folgenden Satz erhalten:

Alle conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes, welchen das nämliche Doppelverhältnis zugehört, bilden ein Regelschaar-Gebüsche Σ_3 und die mit dem entgegengesetzt gleichen Doppelverhältnis das verknüpfte Gebüsche Σ_3'.

Nun gilt die Frage, ob dieser Satz auch umkehrbar ist; d. i. haben alle Regelschaaren eines Gebüsches Σ_3 von conisch berührenden Regelschaaren gleiches Doppelverhältnis und diejenigen des verknüpften Gebüsches Σ_3' entgegengesetzt gleiches Doppelverhältnis?

Es seien ρ_1, ρ_3 irgend zwei Regelschaaren des Gebüsches Σ_3, dann lässt sich, gemäss der Entstehung von Σ_3, zwischen beide eine Regelschaar ρ_2 des verknüpften Gebüsches Σ_3' einschieben, sodass $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ eine dreigliedrige Kette von Regelschaaren ist. Wenden wir jetzt den Satz an, dass zwei conisch berührende Regelschaaren, die sich tragen, entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse haben, so erkennen wir, dass ρ_1 und ρ_3 gleiche Doppelverhältnisse zukommen. Da ferner jede Regelschaar ρ_2 des verknüpften Gebüsches

Σ_3' sich mit jeder Regelschaar der Reihe, zu welcher die Regelschaarreihe, in der sich ρ_2 befindet, die verknüpfte ist, stützt, so folgt, dass alle Regelschaaren des verknüpften Gebüsches das entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnis haben. Somit gilt in der Tat:

Liegen zwei verknüpfte Gebüsche Σ_3 und Σ_3' von conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes vor, so gehört allen Regelschaaren von Σ_3 das gleiche Doppelverhältnis q, allen Regelschaaren von Σ_3' das entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnis $-q$ zu.

Fasst man einen beliebigen Schnittkegelschnitt auf, so stellt, wie wir wissen, sein Continuum von Tangenten auch eine die F^2 conisch berührende Regelschaar dar. Das Doppelverhältnis (g l t x), welches dieser Regelschaar zugehört, ist ersichtlich gleich 1. Denn die Tangente t und die in den betreffenden Tangentenbüschel kommende Erzeugende x der Regelschaar fallen zusammen. Dies gilt für alle Complexkegelschnitte. Folglich haben wir in den Kegelschnitten der F^2 ein ausgezeichnetes Regelschaar-Gebüsche vor uns, deren sämtlichen Regelschaaren das Doppelverhältnis 1 zukommt.

Denke ich mir weiter einen beliebigen Complexkegel (O), so ist das Continuum seiner Kanten auch eine die F^2 conisch berührende Regelschaar. Das Doppelverhältnis (g l t x), welches dieser Regelschaar zugehört, ist gleich -1 (Nr. 15). Dies gilt wiederum bei allen Complexkegeln. Die Tangentialkegel der F^2 bilden somit ihrerseits auch ein ausgezeichnetes Regelschaar-Gebüsche, deren Regelschaaren das Doppelverhältnis -1 zugehört. Da aber alle conisch berührenden Regelschaaren, denen das entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnis zukommt, das verknüpfte Gebüsche erfüllen, so haben wir folgenden Satz:

Die Kegelschnitte und Kegel des Tangentencomplexes liefern ein ausgezeichnetes Paar verknüpfter Gebüsche von conisch berührenden Regelschaaren. Zu den Kegelschnitten gehört das Doppelverhältnis $+1$, zu den Kegeln das Doppelverhältnis -1.

19. Konstruiert man zu den Regelschaaren zweier verknüpfter Gebüsche Σ_3 und Σ_3' von conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes die verbundenen Regelschaaren, so behaupte ich, dass diese wiederum zwei verknüpfte Regelschaar-Gebüsche im Tangentencomplex bilden.

Wir haben ja gesehen (Nr. 15), dass der verbundenen Regelschaar einer conisch berührenden Regelschaar das reciproke Doppelverhältnis zukommt und dass diese verbundene Regelschaar auch eine die F^2 conisch berührende Regelschaar ist. Wenn ich daher zu allen ∞^3 Regelschaaren des Gebüsches Σ_3, denen das gleiche Doppelverhältnis q zukommt, die verbundenen Regelschaaren herstelle, so erhalte ich wiederum ein ∞^3-System von conisch berührenden Regelschaaren, denen das gleiche Doppelverhältnis $\frac{1}{q}$ zukommt, also ein Regelschaar-Gebüsche. Wenn ich in derselben Weise zu allen Regelschaaren des Gebüsches Σ_3' die verbundenen Regelschaaren konstruiere, so kommt ihnen sämtlich das nämliche Doppelverhältnis $-\frac{1}{q}$ zu. Folglich bilden sie ebenfalls ein Gebüsche, und zwar das zu dem andern verknüpfte Gebüsche, weil die zugehörigen Doppelverhältnisse $\frac{1}{q}$ und $-\frac{1}{q}$ entgegengesetzt gleich sind.

Damit haben wir in der Tat folgenden Satz erhalten:

Die verbundenen Regelschaaren der Regelschaaren zweier verknüpfter Gebüsche Σ_3 und Σ_3' von conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes bilden wiederum zwei verknüpfte Gebüsche von conisch berührenden Regelschaaren.

20. Man denke sich jetzt aus zwei verknüpften Regelschaar-Gebüschen Σ_3 und Σ_3' von conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes zwei verknüpfte Regelschaar-Reihen herausgenommen. Sie befinden sich in derselben Schnittcongruenz $\Gamma^2\Gamma'$ eines Gewindes Γ' mit dem Tangentencomplex. Man erhält die Regelschaaren der ersten Reihe, wenn man durch eine ganz beliebige Regelschaar ρ_1 der zweiten Reihe die ∞^1 Strahlennetze innerhalb des Gewindes

Γ legt und diese mit dem Tangentencomplex schneidet. In derselben Weise ergeben sich die Regelschaaren der zweiten Reihe aus einer beliebigen Regelschaar ρ_0 der ersten. Es befindet sich also jede Regelschaar der ersten Reihe mit jeder Regelschaar der zweiten Reihe in demselben Strahlennetze, jede zwei Regelschaaren aus den beiden verknüpften Regelschaarreihen tragen sich.

Die Ebenen der Berührungskegelschnitte sich tragender conisch berührender Regelschaaren sind aber in Bezug auf die Grundfläche conjugiert, wie wir wissen. Fasse ich daher zwei beliebige Regelschaaren ρ_1, ρ_3 in der zweiten Regelschaarreihe und die Ebenen ihrer Berührungskegelschnitte auf, so gilt folgendes: Weil die sämtlichen Regelschaaren der ersten Reihe sich mit den beiden Regelschaaren ρ_1 und ρ_3 der zweiten tragen, so gehen die Ebenen ihrer Berührungskegelschnitte sämtlich sowohl durch den Pol der Ebene des Berührungskegelschnitts der Regelschaar ρ_1 nach der F^2 als auch durch den Pol der Ebene des Berührungskegelschnitts der Regelschaar ρ_3 nach der F^2, also durch die Verbindungslinie dieser beiden Pole. Somit gilt zunächst, dass die Ebenen der Berührungskegelschnitte der Regelschaaren der ersten Reihe einen Ebenenbüschel bilden.

Nun tragen sich doch, wie gesagt, alle Regelschaaren der verknüpften Reihe mit jeder Regelschaar der ersten Reihe. Es sind also die Ebenen der Berührungskegelschnitte der Regelschaaren der zweiten Reihe zu allen Ebenen des eben erhaltenen Büschels in Bezug auf die F^2 conjugiert, d. i. sie sind die Ebenen des Ebenenbüschels um die Polare der Axe des ersten Büschels nach der F^2 als Axe. Wir haben demnach folgendes Ergebnis:

Greift man aus dem Regelschaar-Gebüsche Σ_3 aller conisch berührenden Regelschaaren, denen das gleiche Doppelverhältnis q zukommt eine Regelschaar-Reihe heraus, dann bilden die Ebenen der Berührungskegelschnitte der Regelschaaren dieser Reihe einen Büschel.

Die Ebenen der Berührungskegelschnitte der Regelschaaren der verknüpften Reihe (im verknüpften Regelschaar-Gebüsche

Σ_3') bilden ebenfalls einen Büschel, und zwar denjenigen um die Polare der Axe des ersten in Bezug auf die F^2.

Die Dupelsysteme Σ_5 von Tangenten im Complex.

21. Zwei beliebige Tangenten der F^2 x, x_1 wollen wir ein Tangenten-Dupel nennen, wie ja auch beim allgemeinen Complex 2. Grades je zwei seiner Geraden ein Strahlen-Dupel genannt werden. Jedem Tangenten-Dupel x, x_1 kann man nun die beiden entgegengesetzt gleichen Doppelverhältnisse q und -q zuordnen, welche den beiden conisch berührenden Regelschaaren, die durch x, x_1 gehen, zukommen.

Es gibt im Tangentencomplex der F^2 ersichtlich ∞^6 Tangenten-Dupel; jedem von ihnen gehören zwei bestimmte Doppelverhältnisse zu. Zwei Tangenten-Dupeln x, x_1 und y, y_1 können gleiche Doppelverhältnisse q, -q zukommen. Wie sind diese Dupel angeordnet? Wenn zwei Dupel x, x_1 und y, y_1 gleiche Doppelverhältnisse haben, dann heisst dies, gemäss der Definition der Doppelverhältnisse eines Dupels, dass die je zwei hindurchgehenden conisch berührenden Regelschaaren beziehungsweise gleiche Doppelverhältnisse haben. Alle conisch berührenden Regelschaaren aber, denen das gleiche Doppelverhältnis q zukommt, bilden ein Regelschaar-Gebüsche Σ_3 und die conisch berührenden Regelschaaren, denen das entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnis -q zukommt, das verknüpfte Gebüsche Σ_3'. Also sind die beiden Geraden jedes der beiden Tangenten-Dupel, denen die gleichen Doppelverhältnisse q, -q zukommen, zwei Geraden je einer Regelschaar der beiden Gebüsche Σ_3 und Σ_3' von conisch berührenden Regelschaaren, denen bezw. die Doppelverhältnisse q, -q zugehören.

Nun findet man in Sturms Liniengeometrie Bd. III 648 folgende Sätze:

Alle ∞^5 Dupel eines Complexes 2. Grades, welche dreigliedrig aus einem bestimmten Dupel abgeleitet werden können, bilden ein in sich geschlossenes System Σ_5, das aus

jedem seiner Dupel in derselben Weise abgeleitet werden kann. Jedem solchen Dupelsystem Σ_5 ist ein Paar verknüpfter Regelschaar-Gebüsche Σ_3 und Σ_3' zugeordnet, und zwar derartig, dass durch jedes Dupel des Systems je eine Regelschaar aus Σ_3 und Σ_3' geht.

Umgekehrt aber führen auch zwei verknüpfte Regelschaar-Gebüsche Σ_3 und Σ_3' zu einem Dupelsystem Σ_5, nämlich durch die ∞^5 Paare von Geraden, die ich entweder in allen ∞^3 Regelschaaren von Σ_3 oder in denen von Σ_3' bilden kann. Durch jedes solche Paar von Geraden geht auch eine Regelschaar aus dem andern Gebüsche Σ_3' oder Σ_3.

Diese Umkehrung kann ich grade für meine Zwecke benutzen. Die beiden Regelschaar-Gebüsche Σ_3 und Σ_3' von conisch berührenden Regelschaaren, denen bezw. die Doppelverhältnisse q, -q zukommen, liefern, auf Grund dieser Umkehrung, durch die ∞^5 Paare von Geraden der ∞^3 Regelschaaren eines von ihnen ein Dupel-System Σ_5. Durch jedes Dupel dieses Systems geht je eine conisch berührende Regelschaar aus Σ_3 und Σ_3'. Da den beiden Gebüschen Σ_3 und Σ_3', resp. ihren Regelschaaren, bezw. die Doppelverhältnisse q, -q zugehören, haben stets die beiden sich in einen Dupel von Σ_5 schneidenden Regelschaaren aus Σ_3 und Σ_3' entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnisse q, -q. Also haben auch alle Dupel dieses Systems Σ_5 gleiche Doppelverhältnisse q, -q.

Da ferner, wie bereits gesagt, die beiden Geraden jedes zweier Tangenten-Dupel x, x_1 und y, y_1, denen die gleichen Doppelverhältnisse q, -q zukommen, immer zwei Geraden je einer Regelschaar dieser beiden Gebüsche Σ_3 und Σ_3', also Dupel unseres Systems sind, so werden durch die ∞^5 Dupel des erhaltenen Systems Σ_5 alle Tangenten-Dupel erschöpft, denen gleiche Doppelverhältnisse q, -q zukommen.

Somit haben wir folgenden Satz gewonnen:

Alle Tangenten-Dupel des Tangentencomplexes, denen die nämlichen Doppelverhältnisse q, -q zukommen, bilden ein Dupelsystem Σ_5.

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, dass wir ein System Σ_5 von Tangenten-Dupeln der F^2 vor uns haben. Kommen

dann auch sämtlichen Dupeln von Σ_5 gleiche Doppelverhältnisse q, -q zu?

Dem Dupel-System Σ_5 eines Complexes 2. Grades ist, wie oben gesagt wurde, ein Paar verknüpfter Regelschaar-Gebüsche Σ_3, Σ_3' zugeordnet, und zwar derartig, dass durch jedes Dupel von Σ_5 je eine Regelschaar aus Σ_3 und Σ_3' hindurchgeht.

Ersichtlich sind in unserm Falle die beiden durch jedes der Tangenten-Dupel von Σ_5 hindurchgehenden Regelschaaren die beiden durch das Tangentenpaar gehenden conisch berührenden Regelschaaren des Tangentencomplexes. Linear berührende Regelschaaren können es nicht sein, und andere als linear und conisch berührende Regelschaaren besitzt der Tangentencomplex nicht. Also sind die beiden dem System Σ_5 von Tangenten-Dupeln zugeordneten Regelschaar-Gebüsche Σ_3 und Σ_3' verknüpfte Gebüsche von conisch berührenden Regelschaaren.

Da nun, wie wir in Nr. 18 bewiesen haben, allen Regelschaaren eines Gebüsches Σ_3 von conisch berührenden Regelschaaren das gleiche Doppelverhältnis q zukommt, den Regelschaaren des verknüpften Gebüsches Σ_3' das entgegengesetzt gleiche Doppelverhältnis —q, so erkennen wir, das tatsächlich allen Dupeln des gegebenen Systems Σ_5 die gleichen Doppelverhältnisse q, -q zukommen.

Wir erhalten somit folgende Umkehrung:

Allen Dupeln eines vorliegenden Systems Σ_5 von Tangenten-Dupeln des Tangentencomplexes der F^2 kommen gleiche Doppelverhältnisse q, -q zu.

22. Durch zwei beliebige Tangenten x, x_1 der F^2 kann ich ∞^{4-1} Regelschaaren legen, deren jede den Tangentencomplex in zwei weiteren Tangenten x_2, x_3 schneidet (Sturm, Liniengeometrie Bd. I 36). Auf diese Weise bekommen wir, ausgehend von dem Tangenten-Dupel x, x_1, eine dreifache Mannigfaltigkeit von Tangenten-Dupeln, die sich mit dem festen Dupel x, x_1 in einer Regelschaar befinden. Diese dreifache Mannigfaltigkeit von Tangenten-Dupeln nennen wir

ein „Dupel-Gebüsche“; das Tangenten-Dupel x,x_1 heisst sein Träger.

Wir erkennen daraus, dass sich zwei beliebige Tangenten-Dupel der F^2 im allgemeinen nicht in einer Regelschaar befinden. Wenn dies aber der Fall sein soll, so muss das eine Dupel sich in dem vom andern getragenen Dupel-Gebüsche befinden.

Je zwei Dupel des Dupel-Gebüsches, das sich auf das Tangenten-Dupel x,x_1 stützt, sind ersichtlich Endglieder einer dreigliedrigen Kette von Dupeln, mit dem Träger x,x_1 als Mittelglied. Demnach gehören alle Dupel des Gebüsches zu demselben Dupelsystem Σ_5.

Es gehören aber nach Sturm, Liniengeometrie Bd. III 648 nicht bloss je zwei Dupel des von x,x_1 getragenen Gebüsches zu demselben System Σ_5, sondern auch das tragende Dupel x,x_1 gehört zu dem System Σ_5.

Alle Tangenten-Dupel x_2, x_3, die sich mit einem bestimmten Dupel x,x_1 in einer Regelschaar befinden, gehören somit, zusammen mit x,x_1, zu demselben System Σ_5. Da wir aber in Nr. 21 bewiesen haben, dass sämmtlichen Dupeln eines Systems Σ_5 von Tangenten-Dupeln gleiche Doppelverhältnisse $q, -q$ zukommen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn vier Tangenten x,x_1,x_2,x_3 der Grundfläche F^2 sich in derselben Regelschaar befinden, so gehören zu den beiden Dupeln x,x_1 und x_2,x_3 gleiche Doppelverhältnisse.

Lebenslauf.

Am 25. Oktober 1880 wurde ich, Paul Gerlich, als Sohn des Kaufmanns Franz Gerlich und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Schlenker, katholischer Konfession, zu Breslau geboren. Die erste Schulbildung wurde mir in der Volksschule Nr. XXIII meiner Vaterstadt zu teil. Von Ostern 1892 bis zum Herbst 1897 besuchte ich das Königl. kath. St. Matthias-Gymnasium zu Breslau. Von diesem Zeitpunkte an war ich Schüler des Königl. Friedrichs-Gymnasiums hierselbst, das ich Ostern 1901 mit dem Zeugnis der Reife verliess.

Am 23. April 1901 wurde ich in der philosophischen Fakultät der Universität Breslau inscribirt, der ich die ganze Zeit meiner Studien angehöre. Ich beschäftigte mich hauptsächlich mit dem Studium der Mathematik und Physik, in zweiter Linie aber auch mit dem der Chemie und Mineralogie und besuchte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren:

Baumgartner, Ebbinghaus, Franz, Hintze, Ladenburg, London, O. E. Meyer, Neumann, Rosanes, Sturm.

Zu dieser Arbeit wurde ich durch Herrn Prof. Dr. Sturm angeregt, der mich auch während ihrer Anfertigung mit seinem Rate unterstützte. Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders aber Herrn Geheimrat Sturm, fühle ich mich zu tiefstem Dank verpflichtet.